Ivar Ekeland

ÉLÉMENTS D'

économie mathématique

Hermann Paris

Collection Méthodes

IVAR EKELAND, né en 1944, à Paris, est professeur sans chaire à l'Université Paris-Dauphine et maître de conférence à l'Ecole polytechnique où il a enseigné la théorie des jeux et l'économie mathématique. Ses travaux personnels portent sur la théorie de l'optimisation, particulièrement le contrôle optimal.

ISBN 2 7056 5853 X

Table

Introduction

Ce livre a été conçu et écrit pour la collection « Méthodes ». C'est dire que son propos est presque exclusivement pédagogique. L'économie mathématique s'est constituée en science autonome, de nombreux chercheurs y travaillent de par le monde, et il m'a semblé que le moment était venu d'un ouvrage d'initiation.

Initiation aux résultats bien sûr. Ils sont fort nombreux, la plupart ont une longue histoire, et certains sont célèbres. Le théorème d'impossibilité d'Arrow (1963) par exemple, est l'aboutissement de travaux entrepris par Condorcet. Il énonce que, pour une société ayant à se décider entre plusieurs solutions, le seul mode de scrutin qui soit cohérent en toute circonstance consiste à s'en remettre au choix d'un dictateur. Un tel résultat a évidemment une portée qui déborde largement le cadre de l'économie mathématique. Encore faut-il bien le comprendre. Pour prendre un autre exemple, la théorie de l'équilibre général est la forme mathématique qu'a revêtue aujourd'hui la très vague loi de l'offre et de la demande, grâce à une réflexion poursuivie sur deux siècles, et jalonnée par les travaux d'Adam Smith, Leon Walras, Vilfredo Pareto, Gerard Debreu. L'idée que lorsqu'un bien vient à manquer son prix a tendance à monter peut paraître aujourd'hui élémentaire. Mais il y a un monde entre cette intuition vague et un énoncé précis affirmant l'existence d'un système de prix pour lesquels l'offre équilibre la demande sur tous les marchés.

Ces deux exemples montrent à quelle profondeur se situe le sujet. Il s'agit de partir des comportements individuels, considérés comme une donnée, pour en déduire des lois économiques au niveau social. C'est le but traditionnel de la microéconomie, par opposition à la macroéconomie, dont les données de départ se situent d'emblée au niveau social. Je n'en fournirai pas moins des éléments de réflexion sur des phénomènes proprement macroéconomiques, comme la fiscalité ou la monnaie. Mais il est clair que l'accent du livre est ailleurs. Les modèles mathématiques sur lesquels nous travaillerons ne comporteront la plupart du temps pas de monnaie, l'avenir – si tant est qu'il intervienne – sera supposé parfaitement connu, et il n'y aura aucun mécanisme social qui vienne s'opposer à une totale flexibilité des prix. Tout est sacrifié au profit de l'individu, et une analyse détaillée sera faite de la structure de ses goûts, et des conséquences qu'elle implique pour l'économie dans son ensemble. Le postulat sous-jacent à toute cette construction est que le moteur de l'économie est l'avidité des individus.

On se place ainsi dans la problématique néo-classique. Bien qu'il soit beaucoup plus difficile de construire un modèle mathématique cohérent sur des bases keynesiennes ou marxistes, des efforts considérables ont été faits ces dernières années et des progrès certains ont été accomplis. L'économie mathématique est une science jeune et en plein développement. A l'heure actuelle, trois revues internationales se consacrent exclusivement à la publication des résultats nouveaux. La masse de l'acquis est telle que le problème du choix se pose de façon décisive. Le parti que j'ai pris a été de partir du modèle le plus simple et le mieux connu, de l'étudier à fond, puis de l'enrichir par des apports successifs et gradués.

Je ne pense pas que je dirai ainsi tout ce qu'il y aurait eu à dire. Mais le lecteur qui m'aura suivi jusqu'au bout aura acquis une base de connaissances et une méthode de raisonnement dont il pourra faire, soit un élément de sa culture générale, soit un tremplin pour aller plus loin.

Initiation aussi aux méthodes. C'est un des principes de l'enseignement que la méthode prime le résultat comme l'intelligence prime la mémoire. C'est plus vrai encore pour l'économie mathématique, dont l'originalité par rapport à l'économie politique réside précisément dans la méthode employée : une formalisation mathématique complète. Comme nous l'avons dit, celle-ci n'est pas toujours possible. Il est d'ailleurs très intéressant, pour l'étude de la cohérence interne d'une théorie, de localiser les points précis où elle résiste à la formalisation. Mais lorsque celle-ci est possible, l'utilisation des mathématiques donne à la pensée une finesse et une rigueur incomparables. Dans la mesure où ils ne se contentaient pas d'une simple description de la réalité, les économistes ont toujours essayé d'employer la démarche hypothético-deductive. L'économie mathématique est l'aboutissement de leurs efforts. Son domaine actuel est encore restreint, mais une grande extension lui est promise.

Or les mathématiques viennent avec armes et bagages. L'extrême précision de la pensée nécessite un vocabulaire particulier qui est bien souvent trompeur : les mathématiciens semblent prendre un malin plaisir à affubler d'un nom familier un concept savant. Pour être parfaitement sûre, la démarche est codifiée, et procède par propositions séparées, chacune d'elles suivie de sa démonstration, qui fait en général appel à celles qui précèdent, mais jamais à celles qui suivent (pour éviter les cercles vicieux). Les concepts utilisés font l'objet de définitions données à part, et les résultats jugés les plus importants sont qualifiés de théorèmes. Quelques démonstrations particulièrement délicates nécéssitent plusieurs étapes, dont certaines ont un caractère purement technique : on les isole sous forme de lemmes. Il y a là tout un arsenal qui permet de contrôler à chaque pas la rigueur d'un raisonnement. Je ne nie pas qu'il soit rebutant pour le profane, mais les mathématiques consistent précisément dans son emploi judicieux. Je tâcherai d'en limiter au maximum les inconvénients par une pédagogie progressive. L'exposé s'appuiera sur les cas techniquement les plus simples, sans jamais perdre de vue les motivations économiques.

Les étudiants des premiers cycles de sciences économiques pourront lire cet ouvrage et en tirer profit. Les connaissances mathématiques, en petit nombre et rappelées dans le courant du texte, sont moins nécessaire qu'une certaine maturité scientifique et une disposition à l'effort personnel.

Mais je n'esquiverai pas plus longtemps la question qui revient constamment sous des formes diverses. Pourquoi l'économie serait-elle mathématique ? Nous aiderez-vous à vaincre l'inflation ? L'économie mathématique est une science si jeune qu'elle doit encore présenter ses lettres de créance.

L'économie tend à être mathématique parce que c'est l'idéal de rigueur que se propose toute science depuis Descartes. La physique l'a atteint, les sciences humaines en sont encore fort loin, mais l'économie en est plus proche qu'aucune autre. Mais il ne faut pas trop en attendre tout de suite. Peut-être disposera-t-on un jour d'une théorie formalisée de la monnaie, intégrant les causes de l'inflation et donnant les moyens de la combattre. Nous n'en sommes pas là aujourd'hui. Les modèles mathématiques actuels sont l'aboutissement de la microéconomie classique. Ils permettent donc les analyses traditionnelles en termes d'efficacité sociale et de vérité des prix. On peut mettre plus particulièrement à leur actif la mise au point de procédures de planification, dont je serai amené à parler.

Mais je pense que la contribution principale de l'économie mathématique se situe à un niveau plus profond. Elle sépare ce qui est vrai par nécessité logique de ce qui est vrai parce qu'on l'a supposé tel. On peut donc, dans un problème théorique ou pratique, dégager parfaitement les présupposés économiques qui sont nécessaires pour arriver aux conclusions proposées, et dont on n'avait peut-être pas conscience. Considérons par exemple une économie de propriété privée regroupant un très grand nombre d'agents qui ne connaissent comme loi que leur propre avidité. Il est difficile de s'imaginer que cela puisse donner autre chose qu'un total chaos, mais les économistes classiques ont toujours soutenu qu'une autre solution était possible. De ce point de vue, il est fort intéressant de savoir que, par nécessité logique, il est toujours possible de trouver un système de prix qui conduise à un équilibre, au moins approximatif, entre l'offre et la demande. Pour prendre un autre exemple, Karl Marx avait donné la baisse tendancielle du taux de profit comme une des lois d'évolution du système capitaliste. Mais aucun des modèles mathématiques proposés à ce jour n'a pu l'établir dans la généralité qu'il lui conférait. Il semble qu'elle dépende logiquement d'hypothèses supplémentaires – égalité du taux de croissance et du taux de profit, absence de surplus de production. Cela veut dire que l'on peut reconnaître qu'elle n'est pas vérifiée dans l'économie contemporaine, sans pour autant remettre en cause les fondements de la théorie marxiste. Mais cela veut dire aussi que si on veut voir dans la baisse tendancielle du taux de profit une loi universelle de l'économie capitaliste, il faut la postuler comme telle.

Le rôle de l'économie mathématique est de clarifier les hypothèses utilisées et de déduire exactement leurs conséquences. Il n'est pas de dicter des décisions économiques qui doivent s'insérer dans tout un contexte idéologique et social. Elle ne se substitue ni à la politique ni à la philosophie. Certains seront déçus de ce rôle modeste. J'y vois au contraire l'expression d'une vérité profonde : le gouvernement des hommes appartient aux hommes, et la science ne les en décharge pas. Multivac, l'ordinateur géant qui dicte la conduite de chacun dans l'intérêt général, est une créature de la science-fiction. La vraie science, au contraire, se barre le chemin de la dictature en affirmant qu'elle n'est pas dépositaire de l'intérêt général ou du bien commun – c'est là à mon sens la signification du théorème d'Arrow. Quiconque invoque ces notions a donc des présupposés idéologiques dont il doit rendre compte.

L'économie mathématique enseigne la rigueur de pensée et la liberté de jugement, dans un domaine où sévissent encore la confusion des genres et l'argument d'autorité. Elle clarifie les concepts de base et leur jeu réciproque, et elle est ouverte sur les applications. Elle est peut-être l'image de ce que seront les sciences humaines de l'avenir. Mieux qu'aucune autre, elle réunit les deux mobiles que Francis Bacon assignait à la science : « pour la gloire de Dieu et l'amélioration de la condition humaine ».

I. E.

I. Individu et collectivité

1. Les biens

Les données primitives de l'économie sont les biens et les agents. Chacun de ces concepts renvoie à l'autre, et c'est précisément leur dialectique qui constitue l'objet de la science économique. Disons qu'il y a biens économiques et agents économiques si l'on constate que ces biens s'échangent contre d'autres en des transactions où ces agents sont parties prenantes. Ainsi, l'existence d'une criée aux poissons sur laquelle elle est cotée, fait apparaître la sole comme un bien économique et son pêcheur comme un agent économique. Ce même pêcheur peut se donner beaucoup de mal pour capturer des méduses : comme elles n'intéresseront personne, elles ne constitueront pas pour autant un bien économique. Inversement, les prédateurs marins qui se nourrissent de poissons fins ont beau influer sur les cours, ils n'accèdent pas pour autant au statut d'agents économiques. C'est qu'ils se montrent peu enclins à échanger leurs prises contre autre chose.

Ces quelques remarques ne sont pas aussi anodines qu'elles en ont l'air. Elles portent l'idée que le bien économique est défini par une *possibilité d'échanges.* Cette idée est loin d'être universellement acceptée. Dans la préférence pour l'or que manifestent Etats et particuliers, on retrouve l'influence de l'idée beaucoup plus ancienne que le bien économique est caractérisé par une valeur intrinsèque qui serait naturellement sienne. Quant aux marxistes, ils identifient les biens économiques au travail humain : ce n'est plus l'échange qui est l'acte premier de l'économie, c'est la production. Ils peuvent donc assigner à chaque bien économique une valeur-travail qui est sienne indépendamment de tout échange. Je ne m'engagerai pas plus avant dans la description de ces voies d'approche : je voulais simplement souligner que dès maintenant, nous en avons pris une autre.

Ils partaient conquérir le fabuleux métal
Que Çipango mûrit dans ses mines lointaines ...

Le point de vue adopté ici s'éclaire singulièrement par contraste. Est bien économique ce qui fait l'objet de transactions dans une société donnée. Ce n'est pas une définition normative, c'est un constat relatif à une situation historique. Même la personne humaine ou son travail n'ont pas de valeur intrinsèque qui permette de les cataloguer à coup sûr. Certes, dans les sociétés industrielles, toutes les personnes figurent comme agents économiques, au moins comme consommateurs, et leur travail est certainement le bien économique premier, pour la plupart l'unique ressource. Mais c'est une situation historique. Dans les sociétés antiques, un grand nombre de personnes étaient rangées parmi les biens économiques, sous la rubrique « esclaves ». Quant au travail, qui est un bien économique lorsqu'il provient d'un homme libre qui le loue contre un salaire, il ne l'est plus lorsqu'il provient d'un esclave, qui doit toutes ses forces à son maître, sans que celui-ci soit tenu à aucune contrepartie.

La frontière entre les biens économiques et ceux qui ne le sont pas fluctuera avec les circonstances historiques. Les charges publiques sont des biens économiques du temps de la vénalité des offices. Elles ne le sont plus lorsqu'elles deviennent héréditaires ou sont pourvues par concours. Même si l'on saisit une société à un moment donné de son histoire, cette frontière peut être très floue. Où ranger par exemple les divers marchés occultes, tels que la prostitution ou la corruption dans les sociétés contemporaines ? La première simplification que nous ferons, pour les besoins de notre modèle, sera de supposer la frontière nettement tracée. La liste des biens économiques et des agents économiques, pour la société étudiée, est donc arrêtée. Répétons une dernière fois que cette liste est purement descriptive, et n'a aucune valeur normative.

Soit l le nombre de biens économiques, et m le nombre d'agents économiques. Que le nombre d'agents soit fini n'étonnera personne. Il faudra qu'il soit très grand si l'on veut avoir quelque prétention à décrire la réalité contemporaine. Cela ne m'empêchera pas de prendre $m = 2$ si cela me facilite l'exposition d'un phénomène particulier. On peut s'étonner davantage que le nombre de biens soit fini, surtout si l'on tient compte du fait qu'ils sont localisés et datés, comme nous allons le voir tout à l'heure. Disons simplement qu'il paraît difficile d'admettre que les agents font en permanence des différences marquées entre une infinité de biens distincts. Un nombre l très grand, mais fini, paraît plus conforme à la réalité. De toutes façons, prendre l infini condui-

rait à des difficultés mathématiques hors de proportion avec le maigre avantage économique qu'on pourrait en retirer.

Les biens économiques seront toujours supposés *localisés et datés.* En d'autre terme, le blé livrable à Chicago en septembre 1979 et le blé livrable à Paris en mai 1980 sont considérés comme des biens distincts. La réalité économique de cette distinction est confirmée par l'existence de marchés à terme où l'un et l'autre se négocient simultanément à des cours différents. Certains de ces marchés sont d'ailleurs hautement spéculatifs : acheter aujourd'hui du cacao livrable dans un an est un excellent moyen de se ruiner – ou de faire fortune. Pour les besoins de la cause, on divisera le temps en un certain nombre T de périodes et l'espace en un certain nombre P de points de livraison. Ces nombres T et P sont supposés finis (mais peut-être très grands). Cela veut dire par exemple qu'on prend pour période le mois, et qu'on se propose d'étudier l'évolution de l'économie sur dix ans ; alors $T = 120$. On ne distinguera pas du point de vue du temps ou de l'espace entre des marchandises livrées au cours de la même période au voisinage du même point de distribution.

J'en arrive maintenant à la deuxième simplification pour les besoins du modèle : tous les biens sont supposés *mesurables.* J'entends par là que chacun d'eux est homogène et qu'on ne les négocie pas à la pièce. Cela a un sens de dire qu'on en veut un petit peu plus, ou un petit peu moins, ou exactement deux fois plus, ou exactement deux fois moins. On conçoit que cette possibilité d'ajustements facilite beaucoup les échanges. Aussi les sociétés historiques ont-elles introduit divers artifices pour la généraliser : les aliments se vendent au poids, les liquides au volume, le travail se paie à l'heure. Pour tous ces biens courants, notre hypothèse est vérifiée. Elle commence à faire problème quand il s'agit de voitures : on en a une ou on n'en a pas. Au niveau du constructeur, le problème disparaît : sur une production annuelle de l'ordre du million de véhicules, il peut certainement négocier n'importe quelle fraction. Même au niveau du consommateur, on peut se tirer d'affaire en considérant les divers modèles que propose un constructeur comme un seul et même bien. Les grandes marques ont une gamme suffisamment étendue, prolongée encore par le jeu des options et le marché de l'occasion, pour que l'on puisse mettre dans l'achat d'une voiture à peu près la somme que l'on veut. Un argument voisin s'applique aux équipements lourds, comme les centrales nucléaires et les porte-avions. Ce sont des unités qui sont construites exclusivement sur commande.

Il n'y a pas une foire aux centrales nucléaires, ou un salon des porte-avions. La construction d'une telle unité n'est pas le point de départ des transactions mais leur aboutissement. Le problème n'est pas de savoir si l'Etat achètera ou non une unité déjà construite, mais de réaliser un compromis entre ce que l'Etat est disposé à payer et ce que le constructeur peut lui fournir. Beaucoup d'ajustements sont possibles pour ce dernier, en taille et en qualité, si bien que l'hypothèse d'un bien mesurable n'est pas là, non plus, sans fondement.

Elle nous permet en tout cas de mesurer la quantité de chaque bien par un nombre réel positif [1]. Ainsi, la quantité de bien k sera un réel $x_k \geqslant 0$. Se donner la quantité de chaque bien revient à se donner les nombres positifs x_k pour k variant de 1 à l. Cela revient à se donner par ses composantes un vecteur $\vec{x}$ de l'espace $\mathbb{R}^l$ à l dimensions :

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_l)$$

Réciproquement, si l'on se donne un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^l$, ses l composantes assignent une quantité à chacun des l biens, pourvu toutefois qu'elles soient toutes positives. On est donc conduit à isoler l'ensemble $\mathbb{R}^l_+$ des vecteurs à composantes toutes positives :

$$\mathbb{R}^l_+ = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^l \mid \forall\, k,\ x_k \geqslant 0 \right\}$$

On l'appelle l'orthant positif. Pour certaines questions on a besoin de son intérieur, noté $\mathring{\mathbb{R}}^l_+$: c'est l'ensemble des vecteurs à composantes strictement positives :

$$\mathring{\mathbb{R}}^l_+ = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^l \mid \forall\, k,\ x_k > 0 \right\}$$

J'en arrive enfin à la formalisation, qui se résume dans une définition toute la discussion précédente :

DEFINITION 1

On appelle *panier de biens* tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+$.

La $k^{\text{ième}}$ composante x_k est positive et indique la quantité de bien k ; si elle est nulle, c'est qu'en fait il n'y a pas de bien k dans le panier. Par un seul

---

(1) Dans cet ouvrage, *positif* signifiera « positif ou nul », et strictement positif signifiera « positif et non nul » : x positif $\Leftrightarrow x \geqslant 0$; x strictement positif $\Leftrightarrow x > 0$.

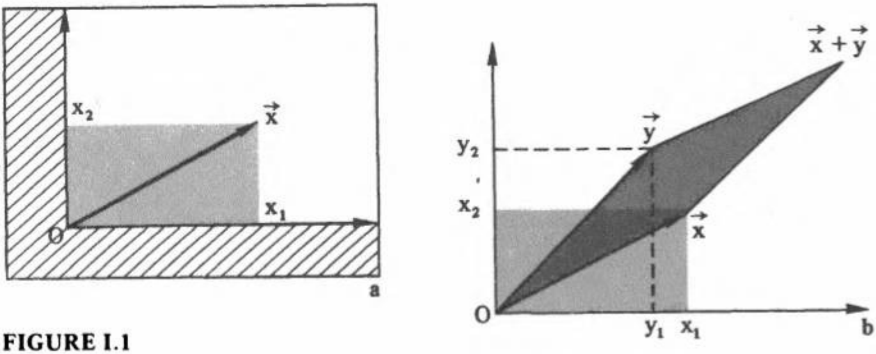


FIGURE I.1

a. *Représentation géométrique de deux biens* (la partie non hachurée est $\mathbb{R}^2_+$)

b. *Somme de deux paniers de biens*

vecteur à l dimensions, le modèle représente une quantité de chacun des l biens. Les problèmes de répartition portant sur les l biens simultanément vont ainsi se trouver ramenés à des problèmes de géométrie dans l'espace à l dimensions. On peut par exemple ajouter des paniers de biens entre eux, ou les multiplier par un scalaire positif :

$$(\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+ \text{ et } \vec{y} \in \mathbb{R}^l_+) \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^l_+ \tag{1}$$

$$(\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+ \text{ et } \lambda > 0) \Rightarrow \lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^l_+ \tag{2}$$

On ne peut pas les retrancher entre eux, car on risquerait d'obtenir pour un certain bien des quantités négatives. A fortiori ne peut-on pas les multiplier par un scalaire strictement négatif. On retrouve là, dans un cas particulier, des notions géométriques d'une grande importance, que je vais rappeler.

DEFINITION 2

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^l$ est *convexe* si, chaque fois qu'elle contient deux points (1) elle contient le segment qui les joint :

$$\vec{x} \in C \text{ et } \vec{y} \in C \Rightarrow \forall \alpha \in [0, 1], \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in C$$

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^l_+$ est un *cône* si, chaque fois qu'elle contient un

(1) Quand on fait de la géométrie, on parle plus volontiers de « points » que de « vecteurs ». Les deux vocables désignent la même réalité : les éléments de $\mathbb{R}^l$.

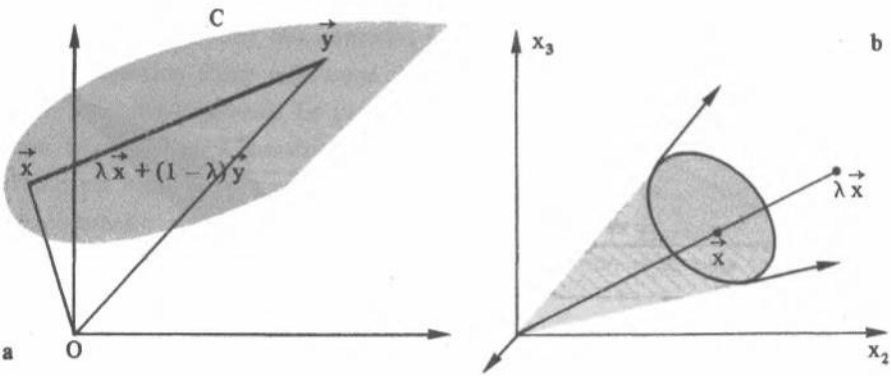


FIGURE I.2

a. *Partie convexe de* $\mathbb{R}^2$ b. *Cône convexe de* $\mathbb{R}^3$

point, elle contient toute la demi-droite issue de l'origine $\vec{0}$ et s'appuyant sur ce point :

$$\vec{x} \in C \Rightarrow \forall \lambda \geqslant 0, \ \ \lambda \vec{x} \in C.$$

Une intersection quelconque de convexes (resp. de cônes) est encore un convexe (resp. un cône) comme il est facile de le vérifier. Par contre, une réunion, même finie, de convexes (resp. de cônes) n'est pas nécessairement un convexe, (resp. un cône). Les espaces vectoriels sont des cônes et sont convexes. On a :

PROPOSITION 3

Un cône C *est convexe si, chaque fois qu'il contient deux points, il contient leur somme :*

$$\vec{x} \in C \ \text{ et } \ \vec{y} \in C \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in C$$

DEMONSTRATION

Donnons-nous $\alpha \in [0, 1]$ et considérons le vecteur $\vec{z} = \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}$. Remarquons que l'on obtient $\vec{z} = \vec{x}$ en faisant $\alpha = 1$, et $\vec{z} = \vec{y}$ avec $\alpha = 0$. Comme C est un cône contenant $\vec{x}$, il contient $\alpha\vec{x}$; de même il contient $(1-\alpha)\vec{y}$. Donc $\vec{z}$ est somme de deux vecteurs de C. L'hypothèse implique alors que C contient $\vec{z}$. Donc C est bien convexe.

Les formules (1) et (2) expriment simplement que $\mathbb{R}^l_+$ est un cône convexe. Le lecteur vérifiera que $\mathring{\mathbb{R}}^l_+$ est convexe, mais n'est pas un cône ; il le devient si on lui adjoint l'origine $\vec{0}$. Les boules sont toujours convexes, mais ne sont jamais des cônes. Rappelons que la boule de centre $\vec{x}$ et de rayon r, notée B $(\vec{x}, r)$, est l'ensemble des points dont la distance à $\vec{x}$ est inférieure à r (ceci impose naturellement que r soit positif) :

$$B(\vec{x}, r) = \{ \vec{z} \mid \| \vec{x} - \vec{z} \| \leqslant r \}$$

avec :

$$\| \vec{x} - \vec{z} \| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_l - z_l)^2}$$

DEFINITION 4

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^l_+$ est *ouverte* si, chaque fois qu'elle contient un point, elle contient une boule de rayon non nul centrée en ce point :

$$\vec{x} \in C \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B(\vec{x}, \epsilon) \subset C$$

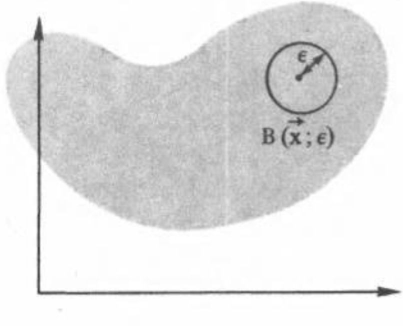


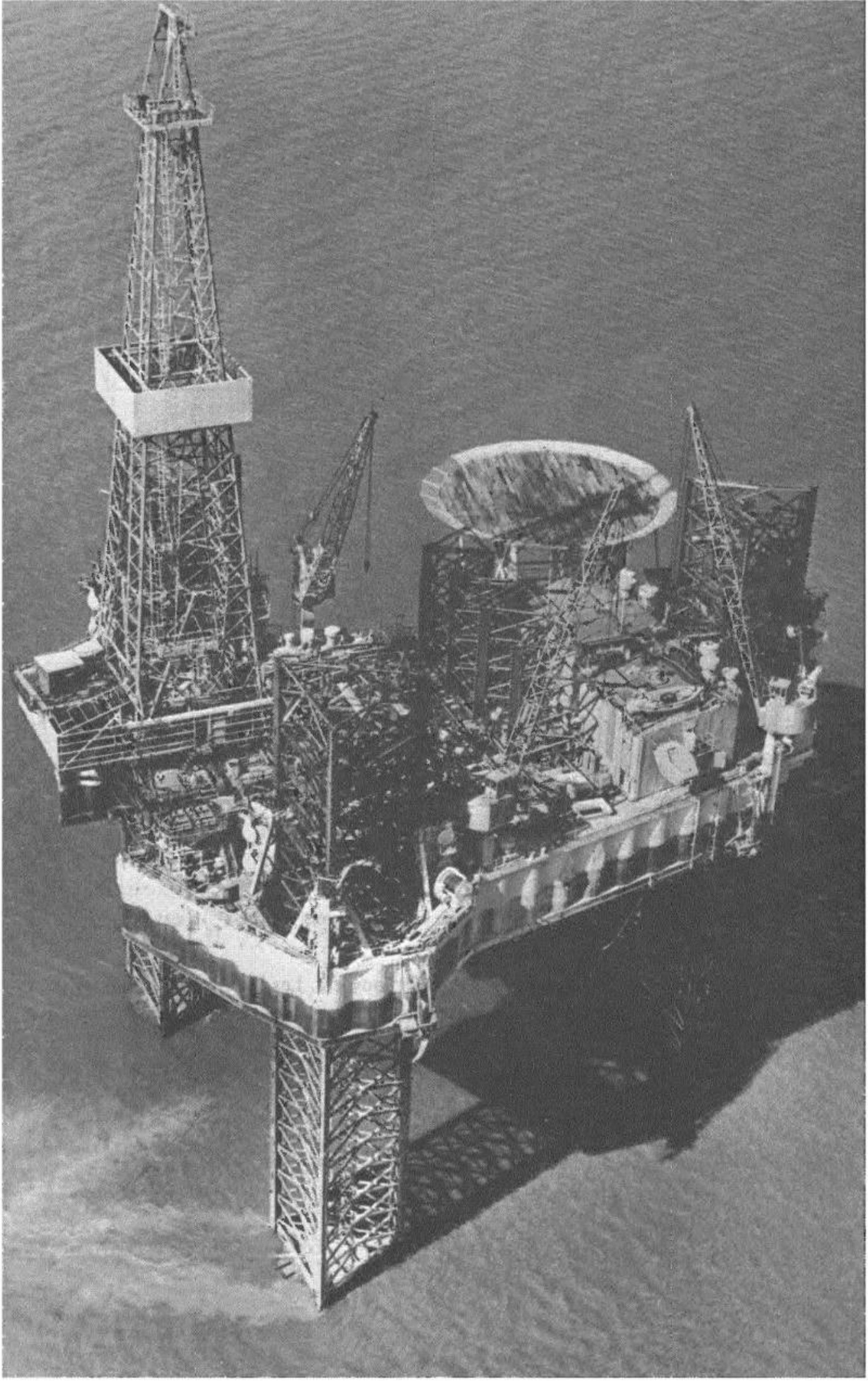
FIGURE I.3. *Ouverts et fermés de* $\mathbb{R}^2$

L'ensemble grisé, y compris son bord, est fermé.
L'ensemble grisé, non compris son bord, est ouvert.

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^l$ est *fermée* si sa complémentaire $\mathbb{R}^l \backslash C$ est ouverte.

On vérifie aisément que $\mathbb{R}^l_+$ est fermée et $\mathring{\mathbb{R}}^l_+$ ouverte. Les boules sont toujours fermées. Toutes ces remarques seront d'une grande utilité dans les démonstrations à venir.

Une dernière étape nous reste à franchir dans la formalisation. On se fixe dorénavant un panier de biens $\vec{\Omega} \in \mathbb{R}^l_+$, censé représenter les réserves globales de l'économie, et supposé connu de tous. On dira que $\vec{\Omega}$ est le vecteur des *ressources totales*.



Il n'y a rien que de très naturel à dire que les ressources naturelles ne sont pas inépuisables. Cette idée ne nous est même que trop familière. Notre époque voit venir une crise de l'énergie et une crise alimentaire. Les experts internationaux recensent les réserves existantes, supputent l'apparition de techniques d'exploitation nouvelles, et leurs prédictions influent sur la vie économique à tous les niveaux. Chacun sait le rôle dans la politique internationale que l'Arabie Saoudite doit à ses immenses réserves de pétrole. Chacun a senti dans sa vie quotidienne l'impact de la politique gouvernementale visant à économiser l'énergie : renchérissement des carburants, alourdissement des impôts. Le modèle exprime cette idée en énonçant que la quantité disponible de bien k est limitée à Ω_k. Si l'on tient compte du fait que les biens sont localisés et datés, on dispose d'une grande souplesse qui permet de coller d'assez près à la réalité. En effet, en ce qui concerne le pétrole, les réserves sont là une fois pour toutes : ce qui restera de pétrole au Koweit en 1990, c'est ce qu'il y a aujourd'hui moins ce qui aura été pompé entretemps. Mais pour les céréales, et les aliments en général, les ressources se reconstituent périodiquement. Le modèle exprime cette idée en distinguant le bien k : « blé produit en U.R.S.S. en 1980 » du bien $k + 1$: « blé produit en U.R.S.S. en 1981 ». Alors Ω_k est la récolte soviétique de 1980 et Ω_{k+1} la récolte soviétique de 1981. Même pour le pétrole, cette facilité peut être utile, car des gisements inexploitables en 1980 peuvent ne plus l'être en 1990, grâce au progrès des techniques. Le pétrole de la Mer du Nord, par exemple, n'est devenu exploitable que vers 1970. On serait donc fondé à ne le faire apparaître dans les ressources totales qu'à partir de cette date.

Mais il ne s'agit pas simplement de constater une pénurie. Plus profondément, il s'agit de reconnaître que c'est la *rareté* qui fait le bien économique. Ce n'est pas une idée naturelle : on penserait plutôt que c'est l'utilité, ou la désirabilité. Mais qu'est-ce qui est plus utile, plus désirable, plus indispensable que l'air que nous respirons ? Et pourtant qui en fait commerce, qui en met de côté ou qui s'en prive ? Il ne fait aucunement l'objet de transactions, et d'après notre critère, ce n'est pas un bien économique. Ce qui se passe avec l'air se passerait aussi bien avec n'importe quel bien qui serait disponible en quantité illimitée. Chacun en prendrait tout ce qu'il veut, il ne risquerait pas de gêner autrui, et il en resterait tout autant. Pourquoi en négocier au voisin, alors qu'il suffit de se baisser pour en prendre et en reprendre ? Pour qu'un bien soit matière à échange, il faut qu'il présente un caractère de rareté.

.es ressources disponibles dépendent de la technologie.

Deux confusions sont à éviter. La première consisterait à assimiler l'eau douce livrée au bord de l'Amazone à l'eau douce livrée au cœur du Sahara. Ce sont deux biens différents, le premier est disponible en quantité pratiquement illimitée, le second ne l'est pas et est donc seul un bien économique. On peut faire commerce du second, mais non du premier. Notons que l'eau distillée livrée au bord de l'Amazone est encore un troisième bien, rare lui aussi au point qu'on n'en trouve pas dans la nature : le Ω_k correspondant est nul. Ceci m'amène au second point : le vecteur $\vec{\Omega}$ décrit les ressources présentes à l'état natif, antérieurement à tout processus de production. Il n'y a pas d'eau distillée dans la nature, pas plus que de sous-marin nucléaire, et les Ω_k correspondants sont tous deux nuls. Cela ne veut pas dire qu'on n'en aura jamais, cela veut dire que si on en veut il faut en produire. En d'autres termes, les composantes non nulles de $\vec{\Omega}$ concernent essentiellement les matières premières et le travail – en quantité limitée lui aussi, car on ne saurait travailler plus de vingt-quatre heures par jour.

J'en arrive à présent au point vraiment délicat : l'hypothèse que ces ressources totales $\vec{\Omega}$ sont connues. C'est la plus restrictive que j'aurai à faire dans le courant du livre. Il semble qu'elle ne soit pas vraiment nécessaire : certains travaux très récents arrivent à introduire des aléas dans le modèle. Mais les complications mathématiques sont alors telles que j'ai préféré les éviter. Telle qu'elle est, cette hypothèse supprime purement et simplement l'incertitude sur l'avenir. Il peut effectivement paraître raisonnable d'admettre que les réserves en pétrole de la planète sont estimées exactement. Mais il est franchement hasardeux de prétendre connaître la récolte de blé des années futures. C'est que la production agricole dépend non seulement de la terre, de l'investissement et du travail, mais aussi du temps. Or le temps ne dépend de personne, on ne peut pas le prévoir d'une année sur l'autre : c'est ce qu'on appelle un aléa. On peut connaître parfaitement tous les autres facteurs, cela ne permet pas de dire quelle sera la récolte, jusqu'à ce que celle-ci soit engrangée. Or cette incertitude joue un rôle important dans la vie économique. Le marché du blé aux Etats-Unis a été complètement bouleversé depuis 1974 par les achats massifs de l'Union Soviétique, consécutifs à de mauvaises récoltes. Il y aurait tout un livre à écrire sur la façon dont les uns et les autres ont joué de l'information et tiré parti de l'imprévu. Ces dernières années, la plupart des marchés de matières premières sont devenus spéculatifs. Le cours du cacao est à la merci des rumeurs en provenance du Nigéria. Qu'un parasite mange la récolte sur pied et le cours s'envole, que la nouvelle soit fausse et il s'effondre. Prévoir exactement n'est pas donné à tout le monde !

Que dire d'autre, sinon avouer que le modèle présenté ne prend pas en compte l'incertitude sur l'avenir. Les études modernes indiquent que c'est tout le côté monétaire de l'économie qui est ainsi mis de côté. Il semble en effet que la monnaie soit une forme de protection contre l'incertain futur. Nous garnissons le bas de laine parce que nous ne savons pas ce que l'avenir nous réserve. Il ne faudra pas s'étonner de voir que les phénomènes liés à la monnaie, comme l'inflation, ou au risque, comme la spéculation, échappent à ce modèle. C'est en quelque sorte l'aspect financier des choses. Reste à étudier l'aspect économique, c'est-à-dire la répartition des biens concrets entre les citoyens...

2. Les consommateurs

Les agents économiques peuvent être consommateurs ou producteurs. Je renvoie l'étude des producteurs au Chapitre IV, et jusque-là je supposerai que les agents sont exclusivement des consommateurs. Il n'y aura donc pas de production dans l'économie. Le vecteur $\vec{\Omega}$ des ressources totales représente tout ce dont les agents pourront disposer. Ce sont de purs dons de la nature, sans qu'il puisse être question de les transformer ou de les augmenter ; tout ce qu'on peut en faire, c'est de les consommer directement. Cela implique que certains biens, peut-être présents, restent inutilisés : ainsi les compétences de l'ouvrier, puisque dans cet éden il n'y a pas de production. La question qui se pose alors est de savoir si la nature est suffisamment généreuse pour faire vivre tout le monde. En d'autres termes, le problème économique qui subsiste est celui du partage des ressources totales $\vec{\Omega}$.

Il est certes commode de traiter séparément la théorie du consommateur et la théorie du producteur. Ainsi l'on série les difficultés, et les problèmes mathématiques sont posés de la manière la plus simple. Mais l'ordre dans lequel on les traite n'est pas indifférent. Pour le marxiste, c'est l'acte de production qui est essentiel, c'est donc la théorie du producteur qu'il convient de faire en premier. Pour le néo-classique, c'est l'acte d'échanger qui fonde l'économie, c'est donc sur une théorie du consommateur qu'il faut s'appuyer. Comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire, cet ouvrage adopte le point de vue néo-classique. Les problèmes fondamentaux se poseront dès la théorie du consommateur, et lorsqu'ils auront été résolus dans ce cadre, nous n'aurons aucun mal à y incorporer une théorie de la production. Il y a dans cette démarche une subordination de la production à la consommation, qui se retrouvera bien entendu dans le résultat final : le théorie complète du Chapitre IV décrit une économie où le consommateur est roi.

Le problème de partager un panier de biens $\vec{\Omega}$ entre m consommateurs a aussi un intérêt économique propre. Il se pose au terme de l'effort de production, quand on considère ses résultats comme acquis, et qu'il s'agit de les répartir entre les citoyens. En d'autres termes, on se place à l'instant intermédiaire entre la production et la consommation ; l'une a déjà eu lieu, l'autre est encore à venir. C'est à ce point de vue que se situent les hommes politiques quand ils parlent de « partager les fruits de l'expansion » ou « répartir les sacrifices ». L'un ou l'autre langage sont employés suivant les circonstances, mais ils posent tous deux le même problème. C'est celui qui va nous occuper maintenant.

Partager les ressources totales $\vec{\Omega}$ signifie attribuer à chacun un certain panier de biens, de telle sorte que la somme des quantités distribuées coïncide avec la quantité totale disponible. En d'autres termes, si $\vec{x}^i \in \mathbf{R}_+^l$ représente la part qui échoit à l'agent i on doit avoir :

$$\vec{\Omega} = \vec{x}^1 + \ldots + \vec{x}^m = \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i \tag{1}$$

Ceci nous conduit aux définitions suivantes :

DEFINITION 1

On appelle *allocation* tout vecteur $\vec{x} = (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$de $\mathbf{R}_+^{lm}$.

Si elle vérifie la condition (1) : $\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i$, on dit qu'elle est *réalisable.*

Une allocation est donc la donnée d'un panier de biens pour chaque agent. Elle est réalisable si les disponibilités globales l'autorisent. Il s'agit alors simplement d'une répartition des ressources totales $\vec{\Omega}$ entre les agents. En ce qui concerne les dimensions, on notera qu'une allocation comporte, pour chacun des m agents, l'indication de la quantité qui lui échoit de chacun des l biens.

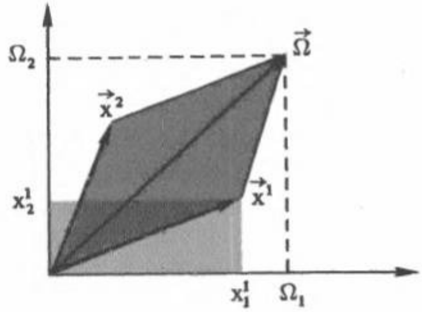


FIGURE I.4
$m = l = 2$; une *allocation* est un couple $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$;
elle est *réalisable* si
$\vec{x}^1 + \vec{x}^2 = \vec{\Omega}$.

En d'autres termes, si l'on écrit $\vec{X} = (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, le vecteur $\vec{x}^i \in \mathbb{R}^l_+$ a l composantes $(x^i_1, \ldots, x^i_l)$; la composante x^i_k est la quantité du bien k que détient l'agent i. Au total, $\vec{X}$ est un vecteur à lm composantes, toutes positives : $\vec{X} \in \mathbb{R}^{lm}_+$.

Le problème du partage consiste donc à trouver la meilleure allocation réalisable. Suivant quels critères ? Comment comparer des allocations ? Nous avons adopté un point de vue descriptif, et non normatif. Il ne s'agit pas d'imposer une solution de l'extérieur, mais de laisser les agents se débrouiller entre eux. Les seuls critères applicables lors du partage sont ceux qui sont reconnus par les intéressés. Ceux-ci cherchent avant tout à satisfaire leurs besoins matériels ; c'est là le souci primordial auquel répond l'activité économique. Ils peuvent aussi, dans leurs choix, exprimer des préoccupations morales ou subir des pressions sociales. En tout cas, les jugements que deux agents distincts portent sur une même allocation peuvent différer considérablement. Il faut donc que le modèle nous fournisse tous ces jugements individuels, et nous dise comment chacun des agents apprécie les diverses allocations. C'est à cette description que nous allons nous attaquer maintenant.

Occupons-nous par exemple de l'agent i. Il ne s'agit pas de le comprendre de l'intérieur, ni de chercher pourquoi il fait tel choix plutôt que tel autre. Les goûts du consommateur sont pris comme des données : on n'explique ni leur formation ni leur évolution. Le modèle se contente de noter, pour chaque paire d'allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, le choix de l'agent i. On notera :

$\vec{X} \succ_i \vec{Y}$ si l'agent i choisit $\vec{X}$

$\vec{Y} \succ_i \vec{X}$ si l'agent i choisit $\vec{Y}$

$\vec{X} \sim_i \vec{Y}$ si cela lui est égal.

On est toujours dans un de ces trois cas, et ils s'excluent mutuellement. Ceci suppose que le consommateur sait comparer entre elles deux allocations quelconques ; en contrepartie, il lui est accordé le droit de se déclarer indécis, tel l'âne de Buridan hésitant entre un picotin d'avoine et un seau d'eau. En d'autres termes, à la question « choisiriez-vous $\vec{X}$ ou $\vec{Y}$? », l'agent *i* a droit à l'une des trois réponses : « je choisirais $\vec{X}$ », « je choisirais $\vec{Y}$ », « cela m'est égal ». Qu'il n'aie le droit de dire, ni « je ne sais pas », ni « je m'en fiche », est un premier postulat du modèle.

Convenons d'employer le langage que voici. Dire que l'agent *i* préfère l'allocation $\vec{X}$ à l'allocation $\vec{Y}$ signifie qu'il choisit $\vec{X}$ ou que cela lui est égal. Cette situation sera notée $\vec{X} \succsim_i \vec{Y}$. Dire qu'il est indifférent entre $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ signifie que cela lui est égal. Voici quelques conséquences immédiates de la définition :

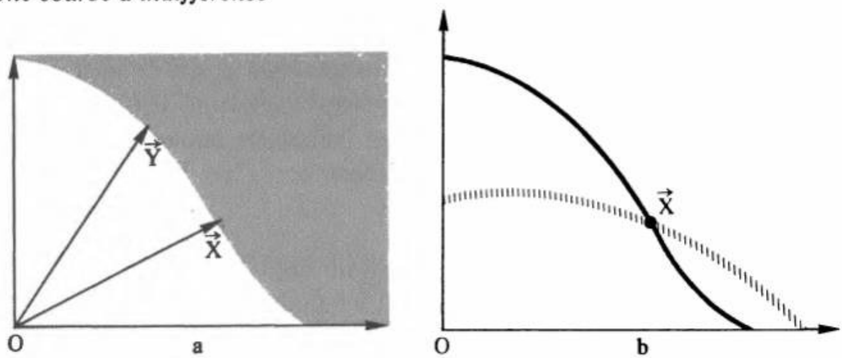
$$\vec{X} \succsim_i \vec{Y} \Leftrightarrow (\vec{X} \succ_i \vec{Y} \text{ ou } \vec{X} \sim_i \vec{Y}) \qquad (2)$$

$$\vec{X} \sim_i \vec{Y} \Leftrightarrow (\vec{X} \succsim_i \vec{Y} \text{ et } \vec{Y} \succsim_i \vec{X}) \qquad (3)$$

$$\forall\, \vec{X} \in \mathbb{R}_+^{lm},\ \vec{X} \sim_i \vec{X} \qquad (4)$$

Jusqu'à présent, le modèle est purement descriptif. Je ne cherche pas à connaître les motivations profondes de l'agent *i*, je me contente de noter les

FIGURE I.5
Une courbe d'indifférence



a. lm = 2. Une allocation $\vec{X}$ est représentée par deux composantes. La zone grisée représente les $\vec{Y}$ préférés à $\vec{X}$, la zone blanche les $\vec{Y}$ non préférés à $\vec{X}$. Si $\vec{Y}$ est sur la frontière, l'agent est indifférent entre $\vec{X}$ et $\vec{Y}$.

b. Un autre agent, en présence des mêmes choix, pourra manifester des préférences tout à fait différentes. En trait continu, la courbe d'indifférence du second, en grisé, celle du premier.

choix qu'il fait. Il n'en reste pas moins que ces motivations existent, et qu'elles imposeront une certaine structure aux préférences exprimées par l'agent *i*. Pour employer un autre langage, j'ai beau ne pas connaître les raisons de l'agent *i*, celui-ci n'en reste pas moins un individu rationnel. Ses choix doivent donc manifester une certaine cohérence. Le second postulat du modèle impose une certaine structure aux préférences, une certaine cohérence dans les choix. Il s'exprime par la propriété dite de *transitivité des préférences* : si l'agent *i* préfère $\vec{X}$ à $\vec{Y}$ et $\vec{Y}$ à $\vec{Z}$, il préfèrera $\vec{X}$ à $\vec{Z}$. En d'autres termes, si l'on se donne trois allocations $\vec{X}$, $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$, et si l'agent *i* n'est pas indifférent entre elles, on se trouve nécessairement dans une des six situations suivantes, de type « linéaire », où chaque allocation est préférée à celles qui se trouvent à sa droite :

$$\vec{X} \succ_i \vec{Y} \succ_i \vec{Z}, \quad \vec{X} \succ_i \vec{Z} \succ_i \vec{Y} \tag{5}$$

$$\vec{Y} \succ_i \vec{X} \succ_i \vec{Z}, \quad \vec{Y} \succ_i \vec{Z} \succ_i \vec{X} \tag{6}$$

$$\vec{Z} \succ_i \vec{X} \succ_i \vec{Y}, \quad \vec{Z} \succ_i \vec{Y} \succ_i \vec{X} \tag{7}$$

à l'exclusion des deux situations suivantes, de type « cyclique » (pour la commodité du dessin, le signe $\succ_i$ a été remplacé par une flèche $\rightarrow$).

$$\begin{array}{ccc} \vec{X} & \rightarrow & \vec{Y} \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & \vec{Z} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \vec{Y} & \rightarrow & \vec{X} \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & \vec{Z} & \end{array} \tag{8}$$

L'hypothèse de transitivité des préférences a été peu contestée. Elle est assez bien vérifiée sur le plan expérimental. On peut quelquefois mettre en évidence, dans les choix proposés aux sujets, des cycles du type (8). Mais lorsqu'on les leur signale, ils ont tendance à les considérer comme des erreurs, et à les « corriger » en conséquence. Ces cycles sont ressentis comme paradoxaux. En particulier, le consommateur ne peut pas trancher entre les trois allocations proposées, et pourtant, il n'est pas indifférent entre elles. La meilleure allocation n'est pas $\vec{Z}$, puisque $\vec{Y}$ ou $\vec{X}$ est préféré ; ce n'est pas $\vec{X}$ non plus ($\vec{Z}$ ou $\vec{Y}$ préféré), $\vec{Y}$ pas davantage ($\vec{X}$ ou $\vec{Z}$ préféré). L'hypothèse de transitivité élimine justement les deux cas paradoxaux : dans les six cas subsistant, il est aisé de trancher. La meilleure allocation, du point de vue l'agent *i*, est $\vec{X}$ dans les cas (5), $\vec{Y}$ dans les cas (6), $\vec{Z}$ dans les cas (7). La transitivité des préférences appararaît ainsi comme l'hypothèse de rationalité minimale.

Après cette discussion sur les hypothèses sous-jacentes, je peux présenter le modèle formalisé :

DEFINITION 1

Un *préordre* sur un ensemble $\mathfrak{X}$ est une relation binaire, notée $\succsim$, supposée :

réflexive : $\forall x \in \mathfrak{X}, \; x \succsim x$

transitive : $[x \succsim \;\text{et}\; y \succsim z] \Rightarrow x \succsim z$

Le préordre est dit *total* si deux éléments quelconque sont comparables :

$$[x \in \mathfrak{X} \;\text{ et }\; y \in \mathfrak{X}] \Rightarrow [x \succsim y \;\text{ ou }\; y \succsim x]$$

DEFINITION 2

La *relation de préférence de l'agent i* est un préordre total noté $\succsim_i$, sur $\mathbb{R}_+^{lm}$.

La relation de préférence de l'agent *i* est une donnée expérimentale. On peut la construire en présentant au sujet toutes les allocations deux par deux, et en lui demandant celle qu'il préfère dans chaque paire. Ce travail a effectivement été fait dans certains cas simples, surtout pour confirmer les hypothèses de base du modèle. Même si on ne peut pas le mener à bien, pour des raisons d'encombrement, quand il y a beaucoup d'agents et de biens, la possibilité d'un contrôle expérimental existe toujours. Rien n'est plus simple que de prendre deux allocations distinctes $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ et de demander à l'agent *i* laquelle il préfère. On remarquera la précision de la question posée : on ne compare jamais que des allocations, c'est-à-dire un panier de biens pour chaque agent. Je ne demande pas : « Préférez-vous les bananes ou les oranges ? », ni même « Préférez-vous cinq kilos de ces bananes-ci ou six kilos de ces oranges-là ? », mais plutôt : « Toutes choses égales par ailleurs, préférez-vous cinq kilos de ces bananes-ci (ici et aujourd'hui) ou six kilos de ces oranges-là (ici et demain) ». Dans le « toutes choses égales par ailleurs », je résume un épais dossier remis à l'agent *i*, indiquant, entre autres, quelles provisions il a déjà faites, ce qu'il a comme voiture, ce que les autres détiennent comme bananes aujourd'hui et ce qu'ils auront comme oranges demain. Qu'il ait déjà cinq tonnes de bananes dans sa cave, ou que personne d'autre n'ait d'oranges demain, sont des circonstances qui influeront certainement sur son choix.

Le modèle reconnaît à l'agent *i* le droit d'être influencé dans ses choix, non seulement par ce qu'il détient déjà, mais par ce qui échoit aux autres. Comme nous l'avons vu, on peut ainsi tenir compte de facteurs tels que la rareté relative du bien proposé, pour l'individu ou la société. Mais on peut aussi tenir compte des préoccupations sociales de l'agent *i*. Ce peut être un égalitariste forcené ; parmi toutes les allocations réalisables, il préfèrera celle qui correspond à un égal partage des ressources totales : $\vec{Z} = (\vec{\Omega}/m, \ldots, \vec{\Omega}/m)$. Ce peut être un parfait égoïste ; pour comparer deux allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, il ne retient que ce qui lui échoit à lui, $\vec{x}^i$ et $\vec{y}^i$. Si par exemple il désire tous les *l* biens, l'allocation réalisable qu'il préfèrera sera celle qui lui donne tout à lui et rien aux autres : $\vec{Z} = (\vec{0}, \ldots, \vec{z}^i = \vec{\Omega}, \ldots, \vec{0})$. Entre ces deux comportements extrêmes s'étend une gamme très riche. La réalité économique est cependant beaucoup plus proche du second type de comportement que du premier. D'abord parce que les sujets ont des besoins matériels, et qu'ils cherchent à les satisfaire en priorité. Ensuite, même en ce qui concerne le superflu, la satisfaction physique de consommer quelque chose personnellement pèse en général beaucoup plus que la satisfaction intellectuelle de savoir que quelqu'un d'autre la consomme à votre place : « Charité bien ordonnée commence par soi-même » semble être la devise en la matière.

Notons que le modèle dénie à l'agent *i* le droit d'être influencé par les choix des autres. On peut tenir compte du panier de biens d'autrui, mais non de son jugement. Le sujet a le droit de dire : « je suis content si les autres ont la même chose que moi », mais non « je suis content si les autres sont contents ». Ceci exclut du champ de l'étude les phénomènes d'entraînement collectif, tels que la mode ou le snobisme : je me mets à vouloir moi aussi du bien *k* parce tous les autres en veulent, ou ceux des autres dont l'opinion m'importe. Le problème qui subsiste, et auquel nous allons nous consacrer dès le paragraphe suivant, est celui de savoir comment la société va arrêter ses choix. Les agents ont été pris à part, et leurs préférences ont été déterminées isolément. Lorsqu'ils rentreront en contact les uns avec les autres commencera un complexe processus de négociations. C'est justement ce marchandage que je vais étudier, dans l'esprit qu'il permettra de déterminer une meilleure allocation réalisable.

3. Le théorème d'Arrow

Voyons dans quels termes se pose maintenant le problème du partage. On cherche une méthode permettant de répartir le mieux possible un panier de biens $\vec{\Omega}$ entre *m* agents. Chacun de ceux-ci est caractérisé par un préordre total

$\succsim_i$ sur $\mathbb{R}_+^{lm}$, sa relation de préférence. Elle a été déterminée en mettant l'agent *i* devant une série d'alternatives : pour chaque paire d'allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, on lui a demandé laquelle il préférait. Le malheur, c'est qu'on ne peut en général pas accéder simultanément aux désirs de tous. Il en est ainsi par exemple dans la situation où chacun voudrait tout pour soi : si l'on donne $\vec{\Omega}$ à l'un il n'en reste plus pour les autres. C'est, comme nous avons déjà eu l'occasion de l'observer, le comportement-type en matière économique. Le problème est donc de trouver le meilleur compromis possible.

Il est naturel de procéder pour la société comme pour les individus, c'est-à-dire de chercher à déterminer une relation de préférence collective, notée $\succsim_s$, sur l'ensemble des allocations réalisables, que nous noterons $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \left\{ \vec{X} = (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathbb{R}_+^{lm} \mid \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i = \vec{\Omega} \right\} \tag{1}$$

Autrement dit, avant de demander à la société quelle est la meilleure allocation réalisable, je lui demande laquelle elle préfère dans une paire donnée. Le processus de décision qui permet de répondre à la première question doit permettre de répondre à la seconde : il est plus simple de choisir un terme parmi deux que parmi une infinité. Inversement, les réponses à la deuxième question, c'est-à-dire la relation de préférence collective, doivent permettre de reconstituer la réponse à la première. Il faut pour cela que cette relation soit :

(1) **Totale** : quelles que soient les allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ proposées, la société est toujours capable de se déterminer, soit en choisissant l'une, soit en se déclarant indifférente. On ne peut pas présenter d'alternative qui n'aboutisse pas à une décision.

(2) **Transitive** : si on présente à la société trois allocations $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, elle est capable de les classer par ordre de préférence (voir l'analyse menée au paragraphe 2). La société peut se décider entre trois termes comme entre deux.

En résumé, la relation de préférence collective doit être un préordre total, tout comme les relations de préférence individuelles. Insistons un peu sur la transitivité. Si on ne l'avait pas, on pourrait trouver un cycle du type (2.8). On aurait alors trois allocations réalisables $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, entre lesquelles le choix serait, sinon impossible, du moins illogique : on ne voit pas pourquoi on choisirait $\vec{Y}$ alors qu'on préfère strictement $\vec{X}$, ou $\vec{X}$ alors qu'on préfère strictement $\vec{Z}$, ou $\vec{Z}$ alors qu'on préfère strictement $\vec{Y}$! La société serait donc incapable de classer les allocations réalisables par ordre de préférence, même en admettant les ex-æquos.

Cette incapacité a de graves conséquences. Tout d'abord, il est fort peu probable que la société puisse désigner une allocation réalisable comme la meilleure. Cela voudrait dire : « Nous ne savons pas classer les autres, mais nous savons que c'est celle-ci que nous préférons ». Si malgré tout tel est le cas, on ne peut pas considérer la réponse comme véritablement satisfaisante. En effet, si cette répartition optimale est interdite pour une raison ou pour une autre, on n'a pas de solution de rechange. A l'extrême, on peut imaginer que des tabous religieux ou des contraintes extérieures limitent les choix aux trois allocations $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ du cycle évoqué ci-dessus ! On retrouve le fait bien connu que seul un classement général permet de se prononcer en toute circonstance : si un candidat fait défaut, on prend le suivant sur la liste, et le tour est joué.

Nous voici donc d'accord pour affirmer que *la relation de préférence collective* $\succsim_s$ *doit être un préordre total, tout comme les relations de préférences individuelles.* Mais attention : quand il s'agissait des individus c'était une hypothèse à vérifier, en ce qui concerne la collectivité c'est une construction à faire. Car la société n'est pas une personne, qui s'exprime par une seule bouche, et qui manifeste l'unité de sa personnalité par la cohérence de ses choix. La réalité expérimentale se réduit aux préférences individuelles, et c'est à partir d'elles seules que la relation de préférence collective doit être construite. Le problème est donc de trouver une règle P déterminant un préordre total $\succsim_s$ sur $\mathcal{R}$ à partir de *m* préordres totaux $\succsim_i$ sur $\mathcal{R}$. On notera (1) :

$$\succsim_s = P(\succsim_1, \ldots, \succsim_m) \tag{3}$$

et on dira que P est une *règle de détermination des choix collectifs*. C'est elle en effet qui nous fournira le critère qui permet de comparer les allocations réalisables.

N'oublions pas que, dans la formule (3), le préordre $\succsim_s$ est censé représenter

(1) Les relations de préférence individuelles ont été définies sur $\mathbb{R}^l_+$; *a fortiori*, elles sont définies sur $\mathcal{R}$. Si on sait comparer deux allocations quelconques, on sait comparer deux allocations réalisables.

les préférences collectives, et les préordres $\succsim_i$ les préférences individuelles. Il y a donc quelques conditions naturelles à imposer à P, et qui sont :

(4) **Axiome de l'unanimité** : si tout le monde préfère $\vec{X}$ à $\vec{Y}$, alors la société préfèrera $\vec{X}$ à $\vec{Y}$:

$$[\forall i, \vec{X} \succsim_i \vec{Y}] \Rightarrow \vec{X} \succsim_s \vec{Y}$$

(5) **Axiome de l'indépendance** : pour comparer $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, la collectivité oublie toutes les autres allocations. La seule chose qui importe est de savoir qui préfère X et qui préfère Y. En langage formalisé, soient $(\succsim_i)$ et $(\underset{i}{\to})$ deux familles de préordres $(1 \leqslant i \leqslant m)$; on pose $\succsim_s = P(\succsim_1, \ldots, \succsim_m)$ et $\underset{s}{\to} = P(\underset{1}{\to}, \ldots, \underset{m}{\to})$. Soient : $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ deux allocations réalisables. Alors :

$$[\forall i, \vec{X} \succsim_i \vec{Y}_r \Leftrightarrow \vec{X} \underset{i}{\to} \vec{Y}] \Leftrightarrow [\vec{X} \succsim_s \vec{Y} \Leftrightarrow \vec{X} \to \vec{Y}]$$

L'axiome de l'unanimité est indiscutable. L'axiome de l'indépendance est beaucoup plus contesté. Il a pour lui une certaine évidence logique : quand il s'agit de choisir entre Pierre et Paul, on ne voit pas ce que les mérites de Jean font à l'affaire. La question posée est : « Lequel des deux préférez-vous ? ». L'agent qui répondrait en parlant d'un troisième semblerait vraiment s'écarter du sujet. De même, pour trancher entre $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, il paraît inutile de se préoccuper des autres allocations réalisables. Parler de $\vec{Z}$ ne ferait que brouiller les cartes. Je vais illustrer ce point de vue par un exemple, qui est celui même que cite Arrow, et je ne donnerai que plus tard la parole aux critiques.

Il est temps en effet de donner des exemples de règles de détermination des choix collectifs. On pense d'abord à la *règle majoritaire* : pour départager deux allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, il suffit de faire voter les agents, l'abstention signalant l'indifférence. Celle qui a recueilli le plus de voix l'emporte. S'il y a égalité, la société se déclare indifférente. C'est très simple et très séduisant. Malheureusement, la relation de préférence collective ainsi définie n'est pas transitive. Soit par exemple un jury de trois membres, 1, 2 et 3, ayant à se prononcer entre trois candidats, A, B et C. Supposons que les préférences personnelles des membres du jury soient données par :

$$A \succ_1 B \succ_1 C$$

$$B \succ_2 C \succ_2 A$$

$$C \succ_3 A \succ_3 B$$

Passons au vote. A la majorité de deux voix sur trois, A l'emporte sur B, C sur A, et B sur C. C'est bien la situation cyclique, de type (2.8), que nous cherchions à éviter. Dans ce contexte, on l'appelle le « paradoxe de Condorcet », car ce dernier l'avait étudiée dans son Essai de 1785. La règle majoritaire n'est donc pas une règle de détermination des choix collectifs.

On peut essayer de l'améliorer en introduisant des pondérations. Voici un système simple que nous appellerons, faute de mieux, la *règle de pondération élémentaire*. Chaque membre du jury classe les candidats par ordre de préférence, puis donne 1 point au premier, 2 points au second, n points au n$^{\text{ième}}$. On fait alors le total des points de chaque candidat, et on les classe d'après ce total, en commençant par celui qui en a le moins. Cette fois la condition de transitivité est satisfaite, et on a bien affaire à une règle de détermination des choix collectifs. Elle satisfait l'axiome de l'unanimité, mais elle ne satisfait pas l'axiome de l'indépendance, comme nous allons le voir. Soit par exemple cinq concurrents A, B, C, D, E, classés de la façon suivante d'après les résultats de trois épreuves 1, 2, 3 :

$$A \succ_1 B \succ_1 C \succ_1 D \succ_1 E$$
$$A \succ_2 B \succ_2 C \succ_2 D \succ_2 E$$
$$C \succ_3 D \succ_3 E \succ_3 A \succ_3 B$$

Cela donne A vainqueur avec 6 points, suivi par C avec 7 points. En particulier, le candidat B, qui est battu par A dans toutes les épreuves, sait qu'il n'a aucune chance de l'emporter, et peut se dire que ce n'est pas la peine de se décarcasser. S'il abandonne, ou s'il sabote sa participation, les classements partiels deviennent :

$$A \succ_1 C \succ_1 D \succ_1 E \succ_1 B$$
$$A \succ_2 C \succ_2 D \succ_2 E \succ_2 B$$
$$C \succ_3 D \succ_3 E \succ_3 A \succ_3 B$$

et le classement général donne C vainqueur avec 5 points suivi par A avec 6 points ! En d'autres termes, B, quoique incapable de gagner lui-même, décide du vainqueur de la compétition. Il est déjà curieux qu'il puisse faire gagner A, bien que constamment précédé par lui. Mais ce qui est vraiment choquant, c'est qu'il puisse faire gagner C rien qu'en se laissant battre ! Les exemples ne manquent pas, dans les rencontres sportives, de concurrents assurant de cette façon le succès d'un camarade. De tels calculs faussent indéniablement la compétition, puisqu'ils conduisent les athlètes à cacher leur valeur véritable. Voilà qui montre a contrario l'intérêt de l'hypothèse d'indépendance.

Ecartons-nous maintenant des voies de la démocratie, et donnons comme dernier exemple la *règle dictatoriale*. Elle consiste à investir un individu, l'agent *i* par exemple, du pouvoir de choisir au nom de la communauté. La relation de préférence collective $\succsim_s$ coïncide avec $\succsim_i$. Il s'agit donc bien d'un préordre total. Les axiomes de l'unanimité et de l'indépendance sont immédiatement vérifiés. En langage formalisé, nous écrirons :

$$P(\succsim_1, .\#.\#, \succsim_m) = \succsim_i.$$

Cette règle est parfaitement résumée dans la formule célèbre : « Ce qui est bon pour General Motors est bon pour l'Amérique ». On voit que les précédents historiques ne manquent pas. Les précédents littéraires non plus : rappelons-nous le lion de la fable, qui a donné son nom à un certain type de partage. Si l'agent *i* lui ressemble (et on sait qu'en matière économique l'égoïsme est la règle), les autres membres de la société risquent fort de se trouver oubliés lors du partage. Au moins auront-ils la maigre satisfaction de savoir que les choix faits en leur nom sont cohérents, et pour cause. La règle dictatoriale est un exemple de règle de détermination des choix collectifs vérifiant l'axiome de l'unanimité et l'axiome de l'indépendance. C'est, me dites-vous, un exemple extrême ? Pas du tout : le théorème d'Arrow affirme que c'est le seul possible.

THEOREME 1 (Arrow)

Les m *règles dictatoriales associées aux* m *agents sont les seules règles de détermination des choix collectifs qui vérifient l'axiome de l'unanimité et l'axiome de l'indépendance.*

On peut énoncer ce théorème de plusieurs autres façons. Introduisons la condition suivante portant sur une règle de détermination des choix collectifs P :

(6) **P n'est pas dictatoriale.**

Alors on peut énoncer le théorème d'Arrow comme un théorème d'impossibilité :

THEOREME 1 *bis*

Les conditions (1), (2), (3), (4), (5), (6) *sont incompatibles.*

Si elles sont incompatibles, et si cinq d'entre elles sont vérifiées, la dernière ne peut pas l'être. Si par exemple (1), (2), (3), (4), (5) sont vérifiées, alors (6) ne l'est pas : on retrouve l'énoncé du théorème 1. On peut construire de cette manière d'autres énoncés équivalents. Ainsi, si (1), (2), (3), (4), (6) sont vérifiés, (5) ne l'est pas :

THEOREME 1 *ter*

Soit P *une règle de choix collectif non dictatoriale et vérifiant l'axiome de l'unanimité. Alors* P *ne vérifie pas l'axiome de l'indépendance.*

On peut donc trouver deux allocations réalisables $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, et deux sociétés distinctes de *m* membres, appliquant toutes deux la règle P et aboutissant au paradoxe suivant : les préférences individuelles sont les mêmes (l'individu *i* de la première société et l'individu *i* de la seconde classent de la même façon $\vec{X}$ par rapport à $\vec{Y}$) mais les préférences collectives sont différentes (pour l'une $\vec{X}$ passe avant $\vec{Y}$, et pour l'autre il passe derrière). En d'autres termes, la réponse à la question « Préférez-vous $\vec{X}$ ou $\vec{Y}$? » dépend de la question « Que pensez-vous de $\vec{Z}$? ».

Il est temps de passer à la démonstration du théorème 1. On va donc se donner une règle P de détermination des choix collectifs, supposée vérifier les deux axiomes, de l'unanimité et de l'indépendance, et on montrera que P est nécessairement une règle dictatoriale. Pour cela, j'introduis la notion de coalition P-décisive. Commençons par noter S (comme société) l'ensemble des *m* agents. Une *coalition* est une partie quelconque de S. Donnons-nous deux allocations réalisables $\vec{X}$ et $\vec{Y}$; une coalition A sera dite P-décisive pour $\vec{X}$ contre $\vec{Y}$ si la société choisit $\vec{X}$ quand tous les membres de A se prononcent pour $\vec{X}$ et tous les autres pour $\vec{Y}$. De manière précise, quels que soient les préordres individuels $\succ_i$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, i \in A, \quad \vec{X} \succsim_i \vec{Y} \\ \forall\, i \notin A, \quad \vec{Y} \succsim_i \vec{X} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{X} \succsim_s \vec{Y}$$

où $\succsim_s = P(\succsim_1, \ldots, \succsim_m)$. Notons que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ ne jouent pas le même rôle. Une coalition sera dite P-décisive si, quels que soient les allocations réalisables $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, elle est P-décisive pour $\vec{X}$ contre $\vec{Y}$. La démonstration procède maintenant en trois étapes.

LEMME 1

On peut trouver deux allocations réalisables $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ et une coalition D réduite à un seul membre, tels que D soit P-décisive pour $\vec{X}$ contre $\vec{Y}$.

DEMONSTRATION

Considérons l'ensemble $\mathfrak{D}$ des coalitions qui sont P-décisives pour une paire d'allocations réalisables bien choisie :

$$\mathfrak{D} = \left\{ A \subset S \mid \exists\, (\vec{X}, \vec{Y}) : A \text{ est P-décisive pour } \vec{X} \text{ contre } \vec{Y} \right\}.$$

L'ensemble $\mathfrak{D}$ est non vide, grâce à l'axiome de l'unanimité, qui nous assure que S elle-même est P-décisive : $S \in \mathfrak{D}$. Soit D une des coalitions de $\mathfrak{D}$ qui ont le moins de membres :

$$\forall A \in \mathfrak{D}, \text{ Card } A \geqslant D$$

L'axiome de l'unanimité implique que $\phi \notin D$. La coalition D n'est donc pas vide, et Card D est supérieur à 1. S'il est égal à 1, on a trouvé une coalition décisive ne contenant qu'un membre, et le tour est joué. Supposons donc Card $D \geqslant 2$.

Soient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ les deux allocations réalisables entre lesquelles la coalition D est décisive. Comme D a au moins deux éléments, on peut la décomposer en un singleton et le reste :

$$D = \{d\} \cup C \text{ avec } d \notin C.$$

Prenons maintenant une troisième allocation réalisable $\vec{Z}$, différente de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, et considérons le cas où les préférences individuelles sont :

$$\vec{X} \succsim_d \vec{Y} \succsim_d \vec{Z}$$
$$\vec{Z} \succsim_i \vec{X} \succsim_i \vec{Y} \qquad \forall i \in C$$
$$\vec{Y} \succsim_j \vec{Z} \succsim_j \vec{X} \qquad \forall j \notin D$$

Comme D est P-décisive pour $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, on a :

$$\vec{X} \succsim_s \vec{Y} \tag{8}$$

On ne saurait avoir $\vec{Z} \succsim_s \vec{Y}$. Cela signifierait que la coalition C est P-décisive pour $\vec{Z}$ contre $\vec{Y}$: $C \in \mathfrak{D}$. Ceci est exclus, car aucune coalition de $\mathfrak{D}$ ne peut avoir moins d'éléments que D. Comme le préordre $\succsim_s$ est total, on conclut que :

$$\vec{Y} \succ_s \vec{Z} \tag{9}$$

Les formules (8) et (9) donnent par transitivité :

$$\vec{X} \succ_s \vec{Z}$$

La coalition $\{d\}$ est donc P-décisive pour $\vec{X}$ contre $\vec{Z}$: $\{d\} \in \mathcal{D}$. Mais $\{d\}$ n'a qu'un membre, alors que D en a au moins deux. Ceci contredit de nouveau la définition de D. L'hypothèse Card D $\geqslant$ 2 était donc absurde.

LEMME 2

La coalition D est P-décisive.

DEMONSTRATION

On notera *d* l'unique membre de D, et on se rappellera que D est P-décisive pour $\vec{X}$ contre $\vec{Y}$. Soit $\vec{Z}$ une troisième allocation, distincte de $\vec{X}$ et de $\vec{Y}$. On se place dans le cas où :

$$\vec{X} \succsim_d \vec{Y} \succsim_d \vec{Z} \qquad (10)$$

$$\vec{Y} \succsim_i \vec{Z} \succsim_i \vec{X} \qquad \forall\, i \neq d \qquad (11)$$

On a $\vec{X} \succsim_s \vec{Y}$ (car D est P-décisive pour cette paire) et $\vec{Y} \succsim_s \vec{Z}$ (par l'axiome de l'unanimité). Comme $\succsim_s$ est transitive, on conclut que :

$$\vec{X} \succsim_s \vec{Z} \qquad (12)$$

L'axiome de l'indépendance nous dit que ce résultat ne dépend que des positions respectives de $\vec{X}$ et $\vec{Z}$ dans les préférences individuelles, et nullement de la position de $\vec{Y}$. On peut donc supprimer $\vec{Y}$ des formules (10) et (11), ce qui donne l'implication :

$$[\vec{X} \succsim_d \vec{Z} \ \text{ et } \ \vec{Z} \succsim_i \vec{X} \ \ \forall\, i \neq d] \Rightarrow \vec{X} \succsim_s \vec{Z}$$

Ceci veut dire précisément que D est P-décisive pour $\vec{X}$ contre $\vec{Z}$. Donnons-nous maintenant une quatrième allocation $\vec{W}$, distincte de $\vec{X}$ et de $\vec{Z}$. Nous nous plaçons d'abord dans le cas où :

$$\vec{W} \succsim_d \vec{X} \succsim_d \vec{Z} \qquad (13)$$

$$\vec{Z} \succsim_i \vec{W} \succsim_d \vec{X} \qquad \forall\, i \neq d \qquad (14)$$

En raisonnant comme précédemment, j'en conclus que $\vec{W} \succsim_s \vec{Z}$, et donc que D est P-décisive pour $\vec{W}$ contre $\vec{Z}$. Comme $\vec{W}$ et $\vec{Z}$ peuvent être choisies arbitrairement parmi les allocations réalisables, le résultat est établi.

LEMME 3

L'unique membre d de D est un dictateur !

DEMONSTRATION

On sait pour l'instant que la coalition D est décisive, c'est-à-dire que l'agent *d* fait prévaloir son opinion chaque fois qu'il est seul de son avis. Soient $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ trois allocations réalisables ; on se place d'abord dans le cas où :

$$\vec{X} \succsim_d \vec{Z} \succsim_d \vec{Y} \tag{15}$$

$$\forall\, i \neq d, \quad \vec{Z} \succsim_i \vec{X} \quad \text{et} \quad \vec{Z} \succsim_i \vec{Y} \tag{16}$$

Alors $\vec{X} \succsim_s \vec{Z}$ (la coalition D est décisive) et $\vec{Z} \succsim_s \vec{Y}$ (axiome de l'unanimité). En utilisant la transitivité, on obtient :

$$\vec{X} \succsim_s \vec{Y} \tag{17}$$

D'après l'axiome de l'indépendance, la conclusion (17) subsiste quelle que soit la place de $\vec{Z}$ dans les formules (15) et (16). En se débarassant de $\vec{Z}$, on obtient l'implication :

$$\vec{X} \succsim_d \vec{Y} \Rightarrow \vec{X} \succsim_s \vec{Y} \tag{18}$$

En échangeant les rôles de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, on obtient :

$$\vec{Y} \succsim_d \vec{X} \Rightarrow \vec{Y} \succsim_s \vec{X}. \tag{19}$$

Comme les préordres sont totaux, on peut rassembler les formules (18) et (19) en une seule :

$$\vec{X} \succsim_d \vec{Y} \Leftrightarrow \vec{X} \succsim_s \vec{Y} \tag{20}$$

Comme $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ peuvent être choisis arbitrairement, le résultat est établi. La règle P était donc bien dictatoriale. Ceci termine la démonstration du théorème 1.

Le théorème d'Arrow affirme en substance que la seule méthode universelle et cohérente de faire de choix collectifs est de s'en remettre à un dictateur. Ce résultat est assez surprenant pour avoir été attaqué ; les critiques portent sur les critères d'« universalité » et de « cohérence ». Tout d'abord, c'est beaucoup demander que d'exiger que la même méthode soit applicable quelles que soient les préférences individuelles, c'est-à-dire que l'argument de P puisse être n'importe quelle famille $\succsim_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, de préordres sur $\mathcal{R}$. On peut penser qu'il existe toujours, sinon un consensus social, du moins une adaptation mutuelle des préférences individuelles, qui rende plus facile la construction d'un préordre collectif. Ainsi Black [1948] a montré que, si tous les agents s'accordent à classer les options de gauche à droite, chacun se situant par ailleurs où il veut et préférant les choix les plus voisins du sien, alors le vote à la majorité simple est une règle de prise de décision collective vérifiant les deux axiomes d'unanimité et d'indépendance. Cette voie semble plus prometteuse en matière politique qu'économique : les idées sont plus faciles à concilier que les besoins. Comme nous avons eu l'occasion de le dire, les agents économiques ont essentiellement un comportement égoïste, et il n'y a pas d'adaptation naturelle de leurs demandes les unes aux autres.

Quant au problème de la cohérence, nous avons déjà eu l'occasion d'en parler : il s'agit essentiellement de la transitivité et de l'indépendance. Une voie ouverte assez récemment consiste à accepter des relations de préférence collective non transitives ; il faut alors se résigner à ne pas pouvoir exprimer un choix dans certaines circonstances. Une autre voie, beaucoup plus utilisée, consiste à contester l'axiome de l'indépendance. L'argumentation est du type suivant. Soit un jury de deux membres, 1 et 2, ayant à classer un grand nombre *n* de candidats. La première liste donne A premier et B second, la deuxième liste donne B premier et A dernier. C'est donc que monsieur 2 considère vraiment A comme très mauvais ; monsieur 2, lui estime que A est à peine meilleur que B. Il est raisonnable de penser que, après délibération, le jury préfèrera B à A. L'année d'après, on se trouve devant une situation inverse : sur la première liste A est premier et B dernier, sur la deuxième B est premier et A second. Le même raisonnement devrait conclure à ce que le jury préfère A à B. Mais si l'on accepte l'axiome de l'indépendance, les positions relatives de A et B étant inchangées sur chacune des listes, leurs positions relatives doivent être inchangées au classement général. Donc le jury doit continuer à préférer B à A.

La difficulté est que les règles de détermination des choix collectifs reposent uniquement sur les préordres de préférence individuels. Or ceux-ci n'expriment que très imparfaitement l'intensité des préférences individuelles ; ils disent que l'agent *i* préfère $\vec{X}$ à $\vec{Y}$, mais ils ne disent pas de combien. Nous allons examiner au paragraphe suivant la question de savoir si on peut construire un outil plus adéquat.

Pour l'instant, retenons qu'il n'y a pas de méthode pleinement satisfaisante permettant d'exprimer un choix collectif à partir de préordres individuels. Le problème que nous nous sommes posé au départ, partager des ressources totales $\vec{\Omega}$ entre m consommateurs, n'a donc pas de solution contraignante. Je ne veux pas dire que dans chaque cas particulier les m agents n'arrivent pas à un accord. Je veux dire qu'il n'y a pas de méthode universellement applicable permettant d'arriver à une répartition « juste ».

4. Préordres de préférence et fonctions d'utilité

Un préordre de préférence $\succsim$ sur $\mathbb{R}_+^{lm}$ est un outil assez encombrant et de portée limitée. Peut-être serait-il possible de le perfectionner, en tenant compte par exemple de l'intensité des préférences : un peu, beaucoup, passionnément. On pense aussitôt à un indicateur chiffré, qui associerait à toute allocation $\vec{X} \in \mathbb{R}^{lm}$ une sorte d'indice de satisfaction $u(\vec{X}) \in \mathbb{R}$. Plus élevé sera l'indice, plus intense sera la satisfaction. Ceci nous conduit à la définition suivante :

DEFINITION 1

On dit que $u : \mathbb{R}_+^{lm} \to \mathbb{R}$ est une *fonction d'utilité* représentant le préordre de préférence $\succsim$ si :

$$u(\vec{X}) \geqslant u(\vec{Y}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{X} \succsim \vec{Y} \tag{1}$$

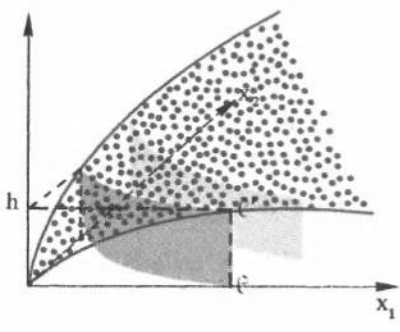


FIGURE I.6. *Fonctions d'utilité*

Le graphe de la fonction d'utilité u est représenté en grisé. La courbe de niveau $\mathcal{C}'$ a pour projection une courbe d'indifférence $\mathcal{C}$.

Historiquement, la notion de fonction d'utilité précède celle de préordre de préférence. Le mot d'« utilité » est traditionnel mais trompeur ; aussi Paréto l'avait-il remplacé par « ophélimite », mais cette terminologie ne s'est pas imposée. En effet, il s'attache à l'utile des considérations objectives et des résonances morales qui ne sont pas de mise ici. Autrui peut prétendre savoir mieux que moi ce qui m'est utile, mais non ce qui me fait plaisir. On dit : « Mange ta soupe, cela te fera du bien », mais non « Mange ta soupe, tu en as envie ». La terminologie en usage, à l'instar de certains principes d'éducation, tend à faire croire que les gens préfèrent $\vec{X}$ à $\vec{Y}$ parce que cela leur est plus utile, guidant ainsi les choix par une norme objective. Ce n'est nullement le sens de notre démarche : la fonction d'utilité, tout comme le préordre de préférence, est un simple constat. Si c'est un drogué que je soumets à mon enquête, je m'apercevrai qu'il accorde une très haute priorité à l'héroïne. J'exprimerai ce fait en disant que les allocations lui attribuant de l'héroïne présentent une utilité très élevée, sans que cela veuille dire que la drogue lui soit utile, au sens usuel du terme. Une fois ce piège indiqué et évité, nous pouvons aller plus loin.

Un préordre de préférence est-il toujours représentable par une fonction d'utilité ? Etant donné $\succsim$, peut-on trouver u vérifiant (1) ? C'est la première question qui se pose. La réponse est positive, moyennant une petite hypothèse supplémentaire sur $\succsim$: ce préordre doit être continu.

DEFINITION 2

On dit qu'un préordre total $\succsim$ sur $\mathbb{R}_+^{lm}$ est *continu* si, pour tout $\vec{X} \in \mathbb{R}_+^{lm}$, les ensembles

$$\{\vec{Y} \mid \vec{Y} \succsim \vec{X}\} \quad \text{et} \quad \{\vec{Z} \mid \vec{X} \succsim \vec{Z}\}$$

sont tous deux fermés dans $\mathbb{R}_+^{lm}$.

Rappelons que cela signifie que, pour toute suite $\vec{Y}_n$ convergeant vers $\vec{Y}$ dans $\mathbb{R}_+^{lm}$ et telle que $\vec{Y}_n \succsim \vec{X}$ pour tout n, on doit avoir $\vec{Y} \succsim \vec{X}$. En d'autres termes, si on peut approcher d'aussi près que l'on veut une allocation $\vec{Y}$ par des allocations préférées à $\vec{X}$, alors l'allocation $\vec{Y}$ elle-même est préférée à $\vec{X}$. De même pour l'autre ensemble $\{\vec{Z} \mid \vec{X} \succsim \vec{Z}\}$. C'est une hypothèse technique. Elle est plausible, car si l'allocation $\vec{Y}_n$ est vraiment très proche de $\vec{Y}$, on ne voit pas pourquoi le sujet ferait de grandes différences entre elles. Son principal mérite est de permettre de démontrer le résultat suivant :

THEOREME 3

Si le préordre de préférence $\succsim$ *sur* $\mathbb{R}_+^{lm}$ *est continu, il peut être représenté par une fonction d'utilité* $u : \mathbb{R}_+^{lm} \to \mathbb{R}$ *continue.*

La clef de la démonstration est la remarque :

LEMME 1

Si u *représente* $\succsim$, *les surfaces de niveau de* u *seront les courbes d'indifférence de* $\succsim$:

$$u(\vec{X}) = u(\vec{Y}) \Leftrightarrow \vec{X} \sim \vec{Y} \tag{2}$$

DEMONSTRATION

Le premier membre signifie que l'on a simultanément $u(\vec{X}) \geqslant u(\vec{Y})$ et $u(\vec{X}) \leqslant u(\vec{Y})$. Par la formule (1), ceci équivaut à la double relation $\vec{X} \succsim \vec{Y}$ et $\vec{Y} \succsim \vec{X}$, c'est-à-dire à $\vec{X} \sim \vec{Y}$.

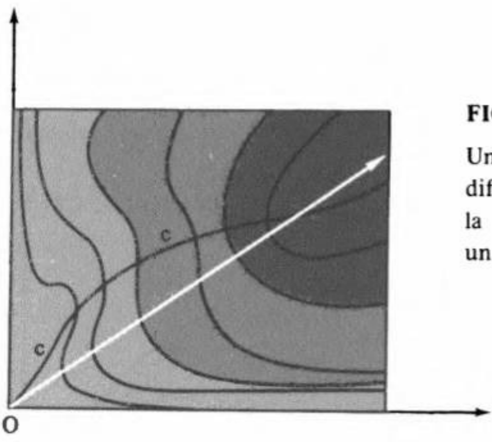


FIGURE I.7

Un réseau typique de courbes d'indifférence vérifiant l'hypothèse (H) : la courbe c rencontre chacune en un point et un seul.

La démonstration du théorème 3 dans le cas général est très technique. J'éviterai la plupart de ces difficultés en faisant une hypothèse simplificatrice (H), d'ailleurs toujours satisfaite en pratique : il existe une courbe continue $c : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+^{lm}$ qui rencontre chaque surface d'indifférence en un point et un seul. Le résultat suivant montre que les points c (t) de la courbe c sont nécessairement rangés par ordre de préférence (croissante ou décroissante).

LEMME 2

Hypothèse (H). Un des termes de l'alternative suivante est vérifié :

$$\forall\, t, t' \quad t < t' \Rightarrow c(t) \succ c(t') \qquad (a)$$

$$\forall\, t, t' \quad t < t' \Rightarrow c(t') \succ c(t) \qquad (b)$$

DEMONSTRATION

Considérons c (1) et c (2). On ne saurait avoir $c(1) \sim c(2)$, sinon la courbe c aurait deux points sur une même surface d'indifférence. On a donc $c(2) \succ c(1)$ ou $c(1) \succ c(2)$.

Plaçons-nous dans le premier cas et considérons la demi-droite $D_+ = \{t > 1\}$. On remarquera qu'elle ne contient pas d'instant $t > 1$ avec $c(t) \sim c(1)$. La partie $A_+ = \{t > 1 \mid c(t) \succ c(1)\}$ coïncide donc avec $A'_+ = \{t > 1 \mid c(t) \succsim c(1)\}$. Son complémentaire dans D_+ est $B_+ = \{t > 1 \mid c(1) \succsim c(t)\}$. Comme le préordre $\succsim$ est continu, les ensembles $\{\vec{X} \mid \vec{X} \succsim c(1)\}$ et $\{\vec{Y} \mid c(1) \succsim \vec{Y}\}$ sont fermés dans $\mathbb{R}_+^{lm}$. Comme l'application $c :]1, \infty) \to \mathbb{R}_+^{lm}$ est continue, leurs images réciproques par c sont fermées. Donc A'_+ et B_+ sont fermées dans D_+. Donc A_+ est ouvert et fermé dans D_+, ce qui implique que $A_+ = \phi$ ou $A_+ = D_+$. Or A_+ n'est pas vide puisqu'il contient 2 ; d'où $A_+ = D_+$. En d'autres termes, $t > 1 \Rightarrow c(t) \succ c(1)$.

Considérons maintenant $D_- = \{t < 1\}$ et $A_- = \{t < 1 \mid c(t) \prec c(1)\}$. On démontre comme ci-dessus que $A_- = \phi$ ou $A_- = D_-$. Supposons que l'on ait $A_- = \phi$, c'est-à-dire que $c(t) \succ c(1)$ pour tout $t < 1$. En introduisant l'ensemble $\{t' > t \mid c(t) \succ c(t')\}$, on conclut comme ci-dessus que c'est la demi-droite $\{t' > t\}$ toute entière. En prenant $t' = 2$, on obtient que $c(t) \succ c(2)$ pour tout $t < 1$. Faisons tendre t vers 1 ; comme le préordre $\succsim$ et la fonction u sont continus, cela donne $c(1) \succsim c(2)$, en contradiction avec l'hypothèse $c(2) \succ c(1)$. C'est donc que $A_- = D_-$, à savoir $t < 1 \Rightarrow c(1) \succ c(t)$.

Si maintenant a est un instant quelconque de $(0, \infty)$, on raisonne comme ci-dessus : tous les t tels que $c(t) \succ c(a)$ seront d'un côté de a, tous les t tels que $c(a) \succ c(t)$ de l'autre. Le côté est déterminé par la position de a par rapport à 1 : si $1 < a$, on a $c(a) \succ c(1)$, et les t tels que $c(a) \succ c(t)$ seront tous à gauche, si $a < 1$, on a $c(1) \succ c(a)$, et les t tels que $c(t) \succ c(a)$ seront tous à droite. Finalement :

$$t > a \Leftrightarrow c(t) \succ c(a)$$

Comme t et a sont arbitraires, on a montré qu'on se trouve dans la situation (b). On raisonnerait de même si $c(1) \succ c(2)$ pour montrer que c'est la situation (a) qui prévaut.

On peut alors terminer la démonstration du théorème 1 dans le cas particulier (H).

DEMONSTRATION

Supposons pour fixer les idées que l'on soit dans la situation (b) décrite par le lemme 2. Je définis alors la fonction d'utilité u de la manière suivante. Soit $\vec{X} \in \mathbb{R}_+^{lm}$ une allocation quelconque. Par hypothèse il existe un seul point c (t) de la courbe c tel que $c(t) \sim \vec{X}$. On pose $u(\vec{X}) = t$ (dans la situation (a) on poserait $u(\vec{X}) = -t$).
Vérifions la formule (1). Si $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont deux allocations quelconques, on peut écrire $\vec{X} \sim c(s)$ et $\vec{Y} \sim c(t)$ de manière unique. On a les équivalences :

$$\vec{X} \succsim \vec{Y} \Leftrightarrow c(s) \succsim c(t) \Leftrightarrow s \geqslant t$$

d'où la formule (1), en posant $s = u(\vec{X})$ et $t = u(\vec{Y})$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction u est continue. Pour cela, il suffit de vérifier que l'image réciproque par u de tout intervalle fermé [a, b] de $\mathbb{R}$ est fermée dans $\mathbb{R}_+^{lm}$. Or :

$$\begin{aligned} u^{-1}([a, b]) &= \left\{ \vec{X} \mid a \leqslant u(\vec{X}) \leqslant b \right\} \\ &= \left\{ \vec{X} \mid a \leqslant u(\vec{X}) \right\} \cap \left\{ \vec{X} \mid u(\vec{X}) \leqslant b \right\} \\ &= \left\{ \vec{X} \succsim c(a) \right\} \cap \left\{ \vec{X} \precsim c(b) \right\} \end{aligned}$$

Chacun des deux ensembles de droite est fermé puisque le préordre $\succsim$ est continu, donc leur intersection est fermée.

Il est maintenant temps de remarquer qu'un même préordre de préférence $\succsim$ peut être représenté – au sens de la définition 1 – par beaucoup de fonctions d'utilité. Dans la construction décrite au théorème 3, nous aurions pu prendre $v(\vec{X}) = t^2$ au lieu de $u(\vec{X}) = t$ (avec $\vec{X} \sim c(t)$) ; la fonction d'utilité v ainsi définie représente $\succsim$ tout comme u. D'une manière générale, on peut toujours changer le barème, resserrer les notes faibles ou desserrer les notes élevées. C'est ce qu'exprime le résultat suivant, dont la démonstration est évidente :

PROPOSITION 4

Soit $u : \mathbb{R}_+^{lm} \to \mathbb{R}$ *une fonction d'utilité représentant le préordre de préférence* $\succsim$. *Pour toute fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *strictement croissante* [1], $v = f \circ u$ *est une fonction d'utilité représentant également* $\succsim$.

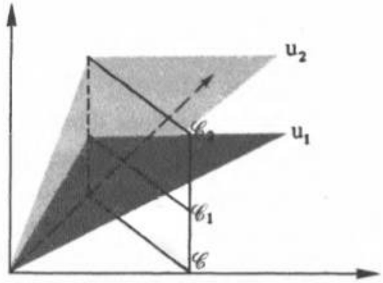


FIGURE I.8

Les deux fonctions d'utilités u_1 et u_2 (dont les graphes sont des plans) déterminent la même relation de préférence : la courbe d'indifférence $\mathcal{C}$ est la projection des courbes de niveau $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

On peut prendre par exemple $f(t) = at + b$ (avec $a > 0$), ou $f(t) = t^3$. Alors $au(\vec{X}) + b$, ou $u(\vec{X})^3$, représentent $\succsim$ au même titre que u, et il n'y a pas de raison apparente de privilégier l'une d'elles. Le choix de u, fonction d'utilité représentant $\succsim$, est jusqu'à présent arbitraire. Ceci a des conséquences importantes. De l'égalité $u(\vec{X}) = 2u(\vec{Y})$, par exemple, on s'abstiendra de conclure que la satisfaction apportée par $\vec{X}$ est deux fois plus intense que celle qu'apporte $\vec{Y}$. Si en effet j'avais choisi comme fonction d'utilité $v(\vec{X}) = u(\vec{X}) + b$, comme il est légitime de le faire, cette égalité deviendrait $v(\vec{X}) + b = 2v(\vec{Y})$. De même, de l'égalité $u(\vec{X}_1 + \vec{Y}) - u(\vec{X}_1) = u(\vec{X}_2 + \vec{Z}) - u(\vec{X}_2)$, on ne saurait conclure que rajouter $\vec{Y}$ à $\vec{X}_1$ ou $\vec{Z}$ à $\vec{X}_2$ procure une satisfaction également intense. En effet, si l'on prend la fonction d'utilité u^3, cette égalité disparaît. En d'autres termes, ce ne sont pas des propriétés intrinsèques : elles dépendent de la fonction d'utilité choisie pour représenter $\succsim$.

Le lecteur peut penser que l'on se noie dans un verre d'eau. Parmi toutes les fonctions d'utilité possibles, le mathématicien ne sait laquelle choisir. A juste titre, puisqu'il n'est pas partie prenante dans l'affaire : ces préférences ne sont

(1) $t < t' \Rightarrow f(t) < f(t')$.

pas les siennes. Mais ce sont bien celles de quelqu'un ? Et si on lui demandait, à cette personne, de dire quelle est *sa* fonction d'utilité ? Ce ne sera pas plus difficile que de déterminer son préordre de préférence. A chaque allocation $\vec{X}$ on lui demandera de mettre une note u $(\vec{X})$. Ainsi sera déterminée, authentifiée, certifiée, une fonction d'utilité u, seule capable de mesurer l'intensité des préférences de l'individu.

Cette démarche est au premier abord séduisante, mais les difficultés subsistent pratiquement inchangées. Tout d'abord, quel barème adopter ? De 0 à 5, de 0 à 20, de 0 à 100 ? Si l'on note de 0 à N, les satisfactions d'intensité N ne pourront pas être augmentées, et les satisfactions d'intensité supérieure à N/2 ne pourront pas être doublées. Peut-être vaudrait-il mieux noter de 0 à $+\infty$, ou même de $-\infty$ à $+\infty$ pour mieux exprimer la dys-satisfaction. Mais si le barème adopté est infini, on peut aussi bien augmenter toutes les notes de dix points, ou les multiplier par deux. Là encore on est renvoyé au donné psychologique. Or l'expérience montre que le sujet, s'il est capable d'exprimer ses préférences, éprouve les plus grandes difficultés à chiffrer leur intensité. Il arrive à situer sa satisfaction sur un barème qu'on lui fournit, mais ces notes n'ont valeur que de classement. Le sujet est incapable de dire si $\vec{X}$ lui procure une satisfaction deux fois plus intense que $\vec{Y}$, ou si son utilité augmente d'autant entre $\vec{Y}_1$ et $\vec{X}_1$ qu'entre $\vec{Y}_2$ et $\vec{X}_2$. La question lui paraît même saugrenue !

En d'autres termes, le donné psychologique de base est le préordre de préférence. Une fonction d'utilité n'est qu'une façon plus commode de l'exprimer. Ni le mathématicien ni le sujet ne sont en mesure de privilégier une fonction d'utilité parmi les multiples possibles, ni de lui faire dire plus que ne dit le préordre de préférences. Toutes les tentatives en ce sens ont échoué.

On peut alors se demander pourquoi introduire u si on ne peut en tirer plus d'information que de $\succsim$. La réponse est que c'est un outil technique : il est plus commode de travailler avec une fonction qu'avec un préordre. A titre d'exemple, démontrons le résultat suivant, qui aura une grande importance par la suite. Rappelons que $\vec{\Omega} \in \mathbf{R}_+^l$ désigne les ressources totales de l'économie, et $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}_+^{lm}$ l'ensemble des allocations réalisables :

$$\mathcal{R} = \left\{ \vec{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) \mid \sum_{i=1}^{m} \vec{x}_i = \vec{\Omega} \text{ et } \vec{x}_i \in \mathbf{R}_+^l \right\} \qquad (3)$$

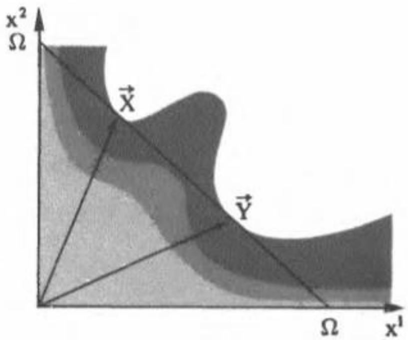


FIGURE I.9

$l = 1$, $m = 2$; le segment de droite $x^1 + x^2 = \Omega$ représente l'ensemble $\mathcal{R}$ des allocations réalisables ; il contient deux allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, préférées à toutes les autres.

PROPOSITION 5

Soit $\succsim$ *un préordre continu sur* $\mathbb{R}_+^{lm}$. *Alors il existe dans* $\mathcal{R}$ *une allocation préférée à toutes les autres :*

$$\exists \vec{X} \in \mathcal{R} : \forall \vec{Y} \in \mathcal{R}, \quad \vec{X} \succsim \vec{Y}$$

DEMONSTRATION

Je dis que l'ensemble $\mathcal{R}$ est fermé et borné, c'est-à-dire *compact* dans la terminologie habituelle. Pour montrer qu'il est fermé, je prends une suite $\vec{X}_n \in \mathcal{R}$ convergeant vers $\vec{X}_\infty$ dans $\mathbb{R}_+^{lm}$; il s'agit de montrer que $\vec{X}_\infty$ appartient aussi à $\mathcal{R}$. Or :

$$\forall n, \vec{X}_n = (\vec{x}_{1n}, \ldots, \vec{x}_{mn}) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \vec{x}_{in} = \vec{\Omega}$$
$$\vec{x}_{in} \to \vec{x}_{i\infty} \quad \text{et} \quad (\vec{x}_{1\infty}, \ldots, \vec{x}_{m\infty}) = \vec{X}_\infty$$

En passant à la limite dans la première ligne à l'aide de la seconde, on obtient $\sum_{i=1}^{m} x_{i\infty} = \vec{\Omega}$. On vérifie de même que $\vec{x}_{i\infty} \in \mathbb{R}_+^l$, donc $\vec{X}_\infty \in \mathcal{R}$. Reste à montrer que $\mathcal{R}$ est borné, c'est-à-dire contenu tout entier dans une boule de $\mathbb{R}^{lm}$. Pour cela, écrivons la formule (3) composante par composante :

$$\forall k = 1, \ldots, l \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \Omega_k \tag{3}$$

Mais les x_{ik} sont tous positifs, puisque $\vec{x}_i \in \mathbb{R}_+^l$. De l'égalité précédente on déduit que $0 \leqslant x_{ik} \leqslant \Omega_k$ pour tout k et tout i. Donc :

$$\sum_{k,i} | x_{ik} |^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{m} | \Omega_k |^2$$

En introduisant les normes euclidiennes :

$$\| \vec{X} \| = (\sum_{k,i} | x_{ik} |^2)^{1/2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^{lm}$$

$$\| \vec{\Omega} \| = (\sum_{k} | \Omega_k |^2)^{1/2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^{l}$$

l'inégalité précédente s'écrit :

$$\vec{X} \in \mathcal{R} \Rightarrow \| \vec{X} \| \leqslant \sqrt{n} \, \| \vec{\Omega} \|$$

ce qui prouve que $\mathcal{R}$ est contenu dans la boule de centre O et de rayon $\sqrt{n} \, \| \vec{\Omega} \|$. Il est donc borné.

Introduisons maintenant une fonction d'utilité continue u représentant $\succsim$ (théorème 3). Un théorème fondamental de l'analyse nous apprend que toute fonction continue sur un compact atteint son maximum et son minimum. Il existe donc un point $\vec{X} \in \mathcal{R}$ tel que :

$$\forall \, \vec{Y} \in \mathcal{R}, \quad u(\vec{X}) \geqslant u(\vec{Y})$$

C'est visiblement le point cherché.

On démontrerait de même qu'il existe dans $\mathcal{R}$ une allocation $\vec{Z}$ à laquelle toutes les autres sont préférées : $\vec{Y} \in \mathcal{R} \Rightarrow \vec{Y} \succsim \vec{Z}$. Il suffit de minimiser u au lieu de le maximiser. Dans ces deux cas, on voit comment un problème sur les préordres a été ramené à un problème sur les fonctions, et résolu en utilisant les outils classiques de l'analyse. Nous verrons de nombreux autres exemples de cette méthode. Pour en faciliter l'usage, je vais étudier quelques propriétés remarquables du préordre total $\succsim$, et montrer comment elles se reflètent dans la fonction d'utilité u. .

Rappelons d'abord que si le préordre $\succsim$ est continu, on peut choisir la fonction u continue (théorème 3). Réciproquement, si la fonction u est continue, le préordre $\succsim$ est nécessairement continu. En effet, l'ensemble $\{ \vec{Y} \in \mathbb{R}_+^{lm} \mid \vec{Y} \succsim \vec{X} \}$ coïncide avec l'ensemble $\{ \vec{Y} \in \mathbb{R}_+^{lm} \mid u(\vec{Y}) \geqslant u(\vec{X}) \}$, qui est fermé si u est continue. De même pour l'ensemble $\{ \vec{Z} \in \mathbb{R}_+^{lm} \mid \vec{X} \succsim \vec{Z} . \}$

DEFINITION 6

On dit que le préordre $\succsim$ est *monotone* si :

$$\forall \vec{X} \in \mathbb{R}_+^{lm},\ \forall \vec{Z} \in \mathbb{R}_+^{lm},\ \vec{X} + \vec{Z} \succsim \vec{X}$$

On dit que la fonction u est *monotone* si :

$$\forall \vec{X} \in \mathbb{R}_+^{lm},\ \forall \vec{Z} \in \mathbb{R}_+^{lm},\ u(\vec{X} + \vec{Z}) \geqslant u(\vec{X})$$

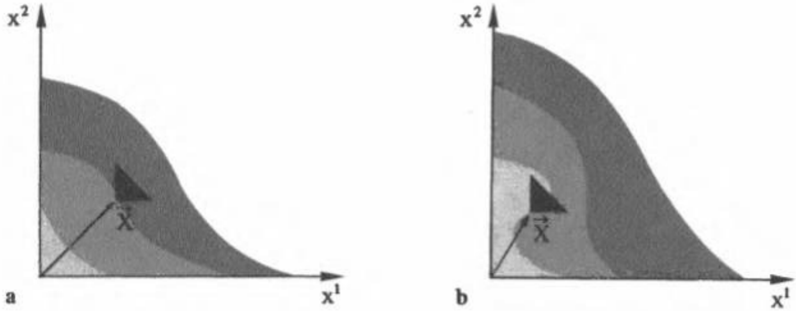


FIGURE I.10

l = 1, m = 2 ; le préordre **a** est monotone, le préordre **b** ne l'est pas ; pour s'en convaincre, il suffit de regarder la position du cône noirci (représentant) les $\vec{Z} \succsim \vec{X}$) par rapport à la courbe d'indifférence passant par $\vec{X}$.

L'hypothèse de monotonie signifie essentiellement que tous les biens sont désirés : plus on en a, plus on est content. C'est évidemment, s'agissant de biens matériels, le cas le plus naturel. Mais il n'en est pas toujours ainsi. Il y a par exemple le bien « travail du sujet », et ce dernier cherche naturellement, à en limiter la fourniture au minimum. Il peut aussi y avoir dans l'économie des nuisances, que le modèle prendra en compte : c'est par exemple le bien « mercure absorbé », ou « bruit subi ». Le sujet n'acceptera pas volontiers qu'on augmente la charge globale de la société, encore moins la sienne propre. On remarquera que le cas où les préférences des individus sont monotones et égoïstes, c'est-à-dire où l'agent *i* ne tient compte dans l'allocation $\vec{X}$ que du panier de biens $\vec{x^i}$ qui lui revient en propre, est celui où le problème du partage se pose avec le plus d'acuité. Ce que voudrait chacun des individus, c'est tout $\vec{\Omega}$ pour lui-même, et rien pour les autres ; l'allocation réalisable que préfère l'agent *i*, c'est $\vec{X} = (\vec{0}, \ldots, \vec{x^i} = \vec{\Omega}, \ldots, \vec{0})$. Les positions de départ ne sauraient être plus incompatibles.

PROPOSITION 7

Si le préordre $\succsim$ est monotone, toute fonction d'utilité u le représentant est monotone. Réciproquement, si la fonction u est monotone, le préordre total $\succsim$ associé est monotone.

La démonstration est facile. Passons à l'étude de propriétés plus fines.

DEFINITION 8

On dit que le préordre $\succsim$ est *convexe* si, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, pour tout $\vec{X} \in \mathbf{R}_+^{lm}$:

$$[\vec{Y} \succsim \vec{X} \quad \text{et} \quad \vec{Z} \succsim \vec{X}] \Rightarrow \lambda\,\vec{Y} + (1-\lambda)\,\vec{Z} \succsim \vec{X} \tag{4}$$

On dit qu'il est *strictement convexe* si, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, pour tout $\vec{X} \in \mathbf{R}_+^{lm}$:

$$[\vec{Y} \succsim \vec{X} \quad \text{et} \quad \vec{Y} \neq \vec{X}] \Rightarrow \lambda\,\vec{Y} + (1-\lambda)\,\vec{X} \succ \vec{X} \tag{5}$$

Un préordre strictement convexe est convexe. En effet, donnons-nous $\vec{Y} \succsim \vec{X}$ et $\vec{Z} \succsim \vec{X}$. Si $\vec{Y} = \vec{Z}$, ou si $\lambda = 0$ ou 1 la formule (4) est établie. Si $\vec{Y} \neq \vec{Z}$, on a $\vec{Y} \succsim \vec{Z}$ ou $\vec{Z} \succsim \vec{Y}$, puisque le préordre $\succsim$ est total. Pour fixer les idées, supposons $\vec{Y} \succsim \vec{Z}$ et appliquons la formule (5) en remplaçant $\vec{X}$ par $\vec{Z}$. On obtient $\lambda\,\vec{Y} + (1-\lambda)\,\vec{Z} \succ \vec{Z}$, donc $\lambda\,\vec{Y} + (1-\lambda)\,\vec{Z} \succ \vec{X}$ par transitivité des préférences. D'où le résultat.

Les hypothèses de convexité sont traditionnelles en économie. Pour mieux comprendre ce que signifie la convexité du préordre de préférence, faisons $\lambda = 1/2$, $\vec{Y} \sim \vec{X}$ et $\vec{Z} = \vec{X}$ dans la formule (4). On voit que si le sujet est indifférent entre $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, il préfèrera à chacun d'eux leur moyenne (strictement si la convexité est stricte). Si par exemple $x_k^i = 0$ et $y_r^i = 0$, mais $x_r^i \neq 0$ et $y_k^i \neq 0$, on aura $(x_k^i + y_k^i)/2 \neq 0$ et $(x_r^i + y_r^i)/2 \neq 0$. L'allocation $(\vec{X} + \vec{Y})/2$ attribue à l'agent *i* du bien *k* et du bien *r*, alors que les allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ ne lui attribuaient que l'un d'entre eux. La convexité du préordre de préférence marque donc une tendance du sujet à répartir sa consommation entre tous les biens, à être représenté sur tous les marchés. On peut l'attribuer à des effets de saturation qui, à partir d'un certain niveau, viennent diminuer l'attrait – ou augmenter les inconvénients – que présente la consommation exclusive d'un certain bien. On peut aussi y voir une loi psychologique qui veut que, lorsque les premiers besoins commencent à être satisfaits, d'autres font leur apparition sur lesquels le sujet se transfère. L'augmentation du niveau de vie ne se traduit pas par une augmentation régulière de la consommation de nourriture, mais par la satisfaction progressive d'autres besoins.

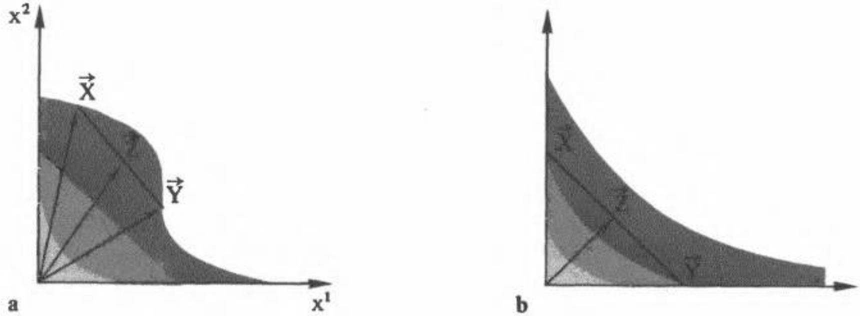


FIGURE I.11

$l = l$, $m = 2$; le préordre **b** est convexe, le préordre **a** ne l'est pas ; remarquer dans chaque cas les positions respectives des allocations $\vec{X}$, $\vec{Y}$ (indifférent) et $\vec{Z} = (\vec{X} + \vec{Y})/2$.

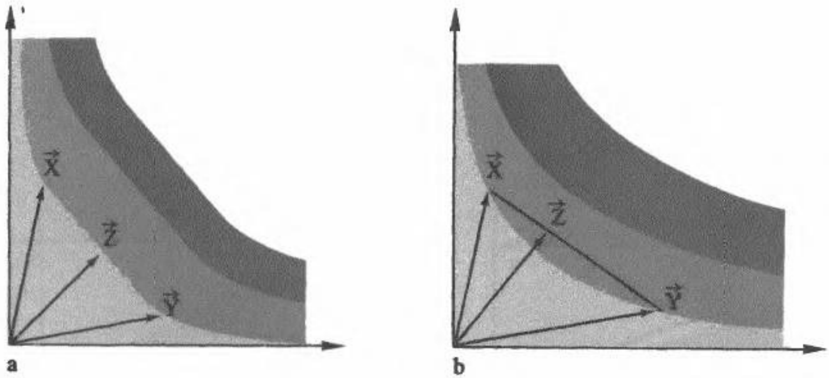


FIGURE I.12

$l = 1$, $m = 2$; le préordre **b** est strictement convexe, le préordre **a** ne l'est pas. On notera dans chaque cas les positions respectives des points $\vec{X}$, $\vec{Y}$ (indifférents) et $\vec{Z} = \lambda\,\vec{X} + (1 - \lambda)\,\vec{Y}$.

La convexité est une propriété géométrique qui se voit très bien sur les surfaces d'indifférence. Rappelons que deux allocations $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ appartiennent à une même surface d'indifférence si et seulement si $\vec{X} \sim \vec{Y}$. Dire que le préordre de préférence $\succsim$ est convexe, c'est dire que chacune des surfaces d'indifférence délimite un domaine convexe (fig. 11). Dire que ce préordre est strictement convexe, c'est préciser qu'aucune de ces surfaces ne contient de segment de droite (fig. 12). Comme les surfaces d'indifférence sont exactement les courbes de niveau des fonctions d'utilité, on en déduit des propriétés de concavité de celles-ci.

DEFINITION 9

On dit qu'une fonction u est *quasi-concave* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble suivant est convexe :

$$S_a = \left\{ \vec{Z} \in \mathbb{R}_+^{lm} \mid u(\vec{Z}) \geqslant a \right\}. \tag{6}$$

On dit que u est *strictement quasi-concave* si, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et tout $\vec{X} \in \mathbb{R}_+^{lm}$, on a :

$$[u(\vec{Y}) \geqslant u(\vec{X}) \text{ et } \vec{Y} \neq \vec{X}] \Rightarrow u(\lambda \vec{X} + (1 - \lambda)\vec{Y}) > u(\vec{Y}) \tag{7}$$

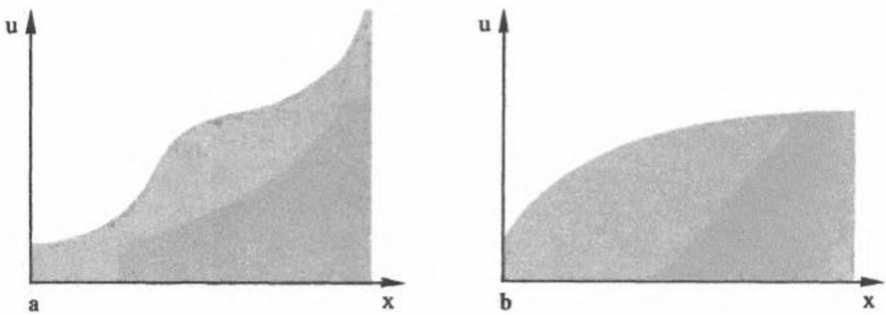


FIGURE I.13

lm = 1 ; la fonction d'utilité en **a** est quasi-concave, en **b** elle est aussi concave.

Cette dernière condition implique que les surfaces de niveau ne contiennent pas de segment de droite. La formule (7) est la traduction littérale de la formule (5). En prenant $a = u(\vec{X})$, la formule (4) dit que si $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ appartiennent à S_a, il en est de même de tous les points du segment d'extrémités $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$. C'est dire que S_a est convexe : d'où la formule (6). On peut donc énoncer :

PROPOSITION 10

Si le préordre $\succsim$ est convexe, toutes les fonctions d'utilité le représentant sont quasi-concaves. Réciproquement, si la fonction u est quasi-concave, le préordre total $\succsim$ associé est convexe.

On a un énoncé analogue avec $\succsim$ strictement convexe et u strictement quasi-concave. Malheureusement, le résultat que nous avons obtenu n'est pas celui qu'on espérait. Les fonctions quasi-concaves sont relativement peu maniables : elles constituent une classe trop vaste pour qu'on puisse leur appliquer des méthodes particulières. Par contre, il serait beaucoup plus intéressant de travailler dans le cadre des fonctions concaves.

DEFINITION 11

On dit qu'une fonction *u* est *concave* si, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, tout $\vec{X} \in \mathbb{R}_+^{lm}$ et tout $\vec{Y} \in \mathbb{R}_+^{lm}$:

$$u(\lambda \vec{X} + (1-\lambda)\vec{Y}) \geqslant \lambda\, u(\vec{X}) + (1-\lambda)\, u(\vec{Y}) \qquad (8)$$

On dit qu'une fonction u est *strictement concave* si, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, tout couple $(\vec{X}, \vec{Y})$ de points distincts :

$$u(\lambda \vec{X} + (1-\lambda)\vec{Y}) > \lambda\, u(\vec{X}) + (1-\lambda)\, u(\vec{Y}) \qquad (9)$$

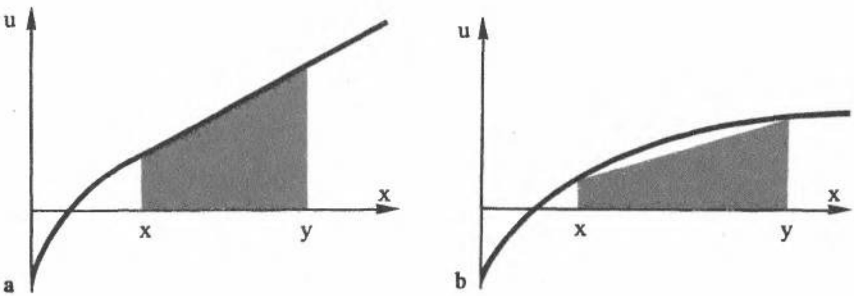


FIGURE I.14

lm = 1. En **a** la fonction d'utilité est concave, en **b** elle est aussi strictement concave. On notera dans chaque cas les positions relatives du graphe et d'un segment dont les extrémités reposent sur lui.

PROPOSITION 12

Toute fonction concave est quasi-concave. Toute fonction strictement concave est strictement quasi-concave.

DEMONSTRATION

Soit u une fonction concave, et a un nombre quelconque. Il s'agit de montrer que :

$$[\mathrm{u}\ (\vec{X}) \geqslant \mathrm{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{u}\ (\vec{X}) \geqslant \mathrm{a}] \Rightarrow \mathrm{u}\ (\lambda\ \vec{X} + (1 - \lambda)\ \vec{Y}) \geqslant \mathrm{a}$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Mais ceci est une conséquence immédiate de l'inégalité (8) :

$$\mathrm{u}\ (\lambda\ \vec{X} + (1 - \lambda)\ \vec{Y}) \geqslant \lambda\ \mathrm{a} + (1 - \lambda)\ \mathrm{a} = \mathrm{a}$$

Si donc u est concave, le préordre total associé $\succsim$ est convexe. Mais la réciproque est fausse. L'étude des conditions à imposer au préordre $\succsim$ pour qu'il puisse être représenté par une fonction d'utilité concave a suscité de nombreux travaux. Il s'agit en gros de conditions portant sur la courbure des surfaces d'indifférence. Voir Debreu (1974) et Kannai pour l'état actuel de la question et des références plus complètes. Entres autres résultats, il a été démontré que tout préordre de préférence $\succsim$ convexe et monotone peut être approché d'aussi près que l'on veut par des préordres représentables par une fonction d'utilité concave.

Toutes ces propriétés liées à la convexité nous seront fort utiles dans la suite. D'un point de vue technique, je ferai fréquemment appel aux caractéristiques suivantes :

PROPOSITION 13

Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si, pour toute famille finie α_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, de coefficients positifs de somme 1, on a :

$$[\forall\ k, x_k \in C] \Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \alpha_k\ x_k \in C.$$

PROPOSITION 13 *bis*

Une fonction $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ est quasi-concave si et seulement si, pour toute famille finie α_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, de coefficients positifs de somme 1, on a :

$$[\forall\ k,\ u\ (x_k) \geqslant a] \Rightarrow u\ (\sum_{k=1}^{K} \alpha_k\ x_k) \geqslant a.$$

PROPOSITION 13 *ter*

Une fonction $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *est concave si et seulement si, pour toute famille finie* α_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, *de coefficients positifs de somme 1, on a :*

$$u\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k$$

On retrouve les définitions originelles en prenant $K = 2, \alpha_1 = \lambda$ et $\alpha_2 = (1 - \lambda)$. La réciproque se démontre par récurrence, ce qui est fastidieux mais facile. Une expression du type $\alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 \vec{y} + \alpha_3 \vec{z}$, par exemple, s'écrit aussi :

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 \vec{x} + \beta_2 \vec{y}) + \alpha_3 \vec{z}$$

avec $\beta_1 = \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\beta_2 = \alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)$, donc $\beta_1 + \beta_2 = 1$. On peut donc obtenir $\alpha_1 \vec{x}_j + \alpha_2 \vec{y} + \alpha_3 \vec{z}$ en prenant successivement un point $\vec{w}$ du segment $[\vec{x}, \vec{y}]$, puis un point du segment $[\vec{w}, \vec{z}]$. Les détails sont laissés au lecteur.

5. Optima de Pareto

Je rappelle le cadre général : une économie constituée de *m* agents, caractérisés par leurs préordres de préférence $\succsim_i$, ayant à se partager *l* biens, présents en quantité totale Ω_k. Le théorème d'Arrow nous apprend qu'il n'est pas possible de construire un préordre de préférence collective $\succsim_s$ sans violer les axiomes de l'unanimité, de l'indépendance, ou aboutir à une règle dictatoriale.

Si l'on introduit les fonctions d'utilité, on peut proposer une règle d'une toute autre nature. Si nous supposons les préordres $\succsim_i$ continus, nous pouvons, d'après le théorème précédent, les représenter par des fonctions d'utilité u_i également continues. Considérons alors la fonction $u_s = R(u_1, \ldots, u_m)$ définie par :

$$u_s = u_1 + \ldots + u_m \qquad (1)$$

C'est une fonction sur $\mathbb{R}^{lm}_+$, à laquelle est associée un préordre continu :

$$\vec{X} \succsim_s \vec{Y} \Leftrightarrow u_s(\vec{X}) \geqslant u_s(\vec{Y})$$

Est-ce qu'on ne tient pas là, en posant $\succsim_s = P(\succsim_1, \ldots, \succsim_m)$, une règle naturelle de détermination des choix collectifs ? Remarquons d'abord qu'elle n'est pas dictatoriale, et qu'elle satisfait visiblement l'axiome de l'unanimité. Elle violera donc nécessairement l'axiome de l'indépendance. Nous avons déjà rencontré ce phénomène dans les exemples concluant le paragraphe 3. Soient par exemple $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ deux allocations telles que $u_i(\vec{X}) = u_i(\vec{Y}) + 1$ pour tout $i \neq 1$, et $u_1(\vec{X}) = u_1(\vec{Y}) - a$. Alors :

$$a < m - 1 \Rightarrow u_s(\vec{X}) > u_s(\vec{Y})$$

$$a > m - 1 \Rightarrow u_s(\vec{X}) < u_s(\vec{Y})$$

En d'autres termes, si l'agent 1 préfère vraiment de beaucoup $\vec{Y}$ à $\vec{X}$, la société préfèrera $\vec{Y}$ à $\vec{X}$; sinon, elle préfèrera $\vec{X}$ à $\vec{Y}$. Pourtant, dans les deux cas, les classements individuels sont les mêmes.

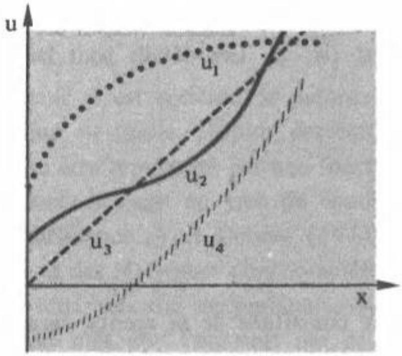


FIGURE I.15

lm = 1. Ces quatre fonctions d'utilité représentent le même préordre : $X \succsim Y$ si $X \geqslant Y$. Laquelle est la plus « naturelle » ?

Mais ce n'est pas là que se situe l'objection au fond. Le problème est celui que j'ai évoqué au paragraphe précédent : il n'y a pas de manière intrinsèque ou naturelle de choisir la fonction d'utilité qui représentera un préordre de préférence donné. Je peux aussi bien décider de représenter le préordre $\succsim_1$ par $100\,u_1$, et je serai alors conduit à proposer comme fonction d'utilité collective $u'_s = R'(u_1, \ldots, u_m)$ définie par :

$$u'_s = 100\,u_1 + u_2 + \ldots + u_m \qquad (2)$$

ce qui, de toute évidence, accorde à l'agent 1 un poids beaucoup plus considérable dans les choix sociaux. J'obtiendrai ainsi un préordre collectif $\succsim'_s$ *différent* du préordre $\succsim_s$ obtenu à partir de la formule 1. D'une manière générale, attribuons aux *m* agents des coefficients quelconques $a_1, \ldots, a_m$, positifs et non tous nuls. La fonction :

$$u_s^a = a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m \tag{3}$$

définit un préordre de préférence sur $\mathbb{R}_+^{lm}$ par :

$$\vec{X} \succsim_s^a \vec{Y} \Leftrightarrow u_s^a(\vec{X}) \geqslant u_s^a(\vec{Y}) \tag{4}$$

On sait que deux fonctions d'utilité proportionnelles définissent le même préordre (la formule (4) ne change pas si on remplace u_s^a par $c\, u_s$, avec $c > 0$). On peut donc changer u_s^a en $u_s^a / \sum_{i=1}^m a_i$ sans changer $\succsim_s^a$, ce qui revient à remplacer le coefficient a_i par $a_i / \sum_{i=1}^m a_i = \alpha_i$. Les α_i sont positifs et de somme 1. On peut donc remplacer la formule (3) par (3′) :

$$\begin{cases} u_s^\alpha = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m, \\ \alpha_i \geqslant 0 \quad \forall\, i, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \end{cases} \tag{3'}$$

A chaque choix des α_i correspond une fonction d'utilité u_s^α différente, et donc un préordre total $\succsim_s^\alpha$ différent. Chacun des $\succsim_s^\alpha$ peut légitimement prétendre représenter les préférences collectives. Celui qui est obtenu par la formule (1) n'est qu'un candidat parmi d'autres : c'est le cas où $a_i = 1/m$, pour tout *i*. Cette symétrie d'écriture est toute illusoire, liée au choix particulier des u_i : la formule (3′) peut elle aussi s'écrire $v_s = v_1 + \ldots + v_m$, à la simple condition de choisir comme fonction d'utilité pour le $i^{\text{ème}}$ agent $v_i = \alpha_i u_i$. Il n'y a aucune raison, même formelle, de préférer u_s à v_s. Nous nous retrouvons donc devant toute une famille de fonctions d'utilité, qui sont toutes sur un pied de parfaite égalité, et entre lesquelles il faut choisir. Une fois déterminée cette fonction d'utilité u_s^α, le problème du choix collectif est résolu grâce à la proposition 4.5 : il s'agit simplement de maximiser u_s^α sur l'ensemble des allocations réalisables. L'introduction des fonctions d'utilité individuelles u_i ne résout pas le problème, mais le déplace : il s'agit maintenant de choisir les coefficients α_i dans la formule (3′) définissant l'utilité collective.

Mais nous ne sommes pas mieux armés pour résoudre ce nouveau problème que l'ancien : suivant quel critère comparer $u_s^\alpha = \Sigma\, \alpha_i u_i$ et $u_s^\beta = \Sigma\, \beta_i u_i$, quand les coefficients α_i et β_i sont différents ? Si l'on impose quelques principes de cohérence (unanimité, indépendance), on retombera sur le théorème d'Arrow, qui nous dit que les règles dictatoriales sont les seules possibles. Elles sont faciles à reconnaître : il suffit de prendre les α_i tous nuls sauf un dans la formule (3′). Ainsi, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$ donnera $u_s^\alpha = u_1$, dictature de l'individu 1. Notre démarche semble donc aboutir à une impasse.

Pas tout à fait cependant. Il faut certes renoncer à privilégier une des fonctions d'utilité u_s données par la formule (3′), ou l'un des préordres $\succsim_s$ qu'elles représentent. Mais leur ensemble, pour informe qu'il soit, n'en limite pas moins le champ des possibles. Je précise ce point. Fixons arbitrairement les coefficients α_i, et cherchons une allocation réalisable $\vec{X}^\alpha$ qui maximise u^α. D'après la proposition 4.5, une telle allocation existe toujours, et l'on a $\vec{X}^\alpha \succsim_s^\alpha \vec{Y}$ pour tout $\vec{Y} \in \mathcal{R}$. Si maintenant $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ varie, l'allocation $\vec{X}^\alpha$ va varier dans l'ensemble $\mathcal{R}$ des allocations réalisables. Cependant, elle ne décrira par $\mathcal{R}$ tout entier, mais un sous-ensemble $\mathcal{P}$ beaucoup plus petit en général. Nous allons voir que les allocations de $\mathcal{P}$ ont des propriétés remarquables, qui font qu'elles sont seules dignes d'être prises en considération pour un choix collectif. L'introduction des fonctions d'utilité u_i aura donc eu pour effet, non de résoudre le problème du choix collectif, mais de la circonscrire ; notre démarche n'aboutit pas à dire *quelle* allocation est la meilleure dans $\mathcal{R}$, mais à désigner une petite partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$ comme seule digne d'être prise en considération pour le choix final. Exécutons maintenant ce programme.

PROPOSITION 1

Soient u_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, des fonctions d'utilité continues représentant les préordres de préférence $\succsim_i$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ une famille quelconque de coefficients positifs, de somme un. Toute allocation réalisable $\vec{X}^\alpha$ maximisant $u_s^\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ sur $\mathcal{R}$ possède la propriété :

$$[\forall i,\ \vec{Y} \succ_i \vec{X}^\alpha] \Rightarrow \vec{Y} \notin \mathcal{R} \qquad (P')$$

Si les α_i sont tous non nuls, $\vec{X}^\alpha$ vérifie une propriété plus forte.

$$\begin{bmatrix} \forall i,\ \vec{Y} \succsim_i \vec{X}^\alpha \\ \exists j : \vec{Y} \succ_j \vec{X}^\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{Y} \notin \mathcal{R}\ (^1) \qquad (P)$$

(1) Enoncé équivalent : $[\forall i,\ \vec{Y} \succsim_i \vec{X}^\alpha] \Rightarrow [\vec{Y} \notin \mathcal{R}$ ou $\forall i,\ \vec{Y} \sim_i \vec{X}^\alpha]$

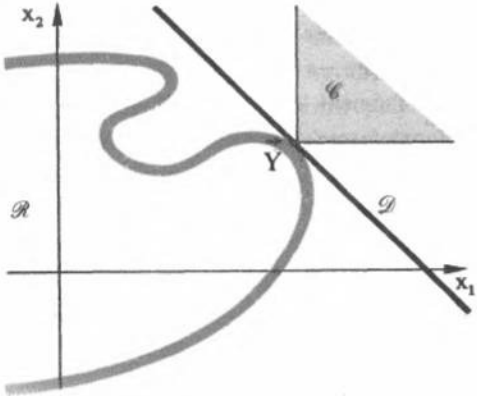


FIGURE I.16

$l = 1$, $m = 2$. La fonction d'utilité du premier agent est supposée être $u_1(X_1, X_2) = X_1$, celle du second $u_2(X_1, X_2) = X_2$. On a représenté l'ensemble $\mathscr{R}$, une allocation $\vec{Y}$ maximisant $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ sur $\mathscr{R}$, la droite $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 =$ constante passant par $\vec{Y}$, et le cône $\mathscr{C}$ des allocations $\vec{Z}$ unanimement préférées à $\vec{Y}$.

DEMONSTRATION

On part de l'inégalité :

$$\forall \vec{Y} \in \mathscr{R}', \ \Sigma \alpha_i u_i (\vec{X}^\alpha) \geqslant \Sigma \alpha_i u_i (\vec{Y}) \tag{4}$$

Si l'on avait un $\vec{Y} \in \mathscr{R}$ avec $\vec{Y} \succ_i \vec{X}^\alpha$ pour tout i, cela se traduirait par $u_i(\vec{Y}) > u_i(\vec{X}^\alpha)$. Il suffirait de multiplier chacune de ces inégalités par α_i et de les ajouter membre à membre pour obtenir :

$$\Sigma \alpha_i u_i (\vec{Y}) > \Sigma \alpha_i u_i (\vec{X}^\alpha) \tag{5}$$

en contradiction avec (4). Si les α_i sont tous non nuls, il suffit pour obtenir (5) que l'inégalité large soit vérifiée pour tous les i et l'inégalité stricte pour un seul.

DEFINITION

Toute allocation réalisable $\vec{X}$ vérifiant la propriété (P′) est appelée *optimum de Pareto faible*. Toute allocation réalisable $\vec{X}$ vérifiant la propriété (P) est appelée *optimum de Pareto strict*. L'ensemble des optima de Pareto faibles (resp. stricts) est noté $\mathscr{P}'$ (resp. $\mathscr{P}$).

Cette notion est due à l'économiste et sociologue italien Vilfredo Pareto (1848-1923). Une allocation $\vec{X}$ est optimale au sens de Pareto si, dans le cadre des ressources disponibles, c'est-à-dire en respectant la contrainte $\Sigma \vec{x}_i = \vec{\Omega}$, on ne peut pas améliorer simultanément le sort de chacun des agents économiques. Soit que l'on fasse strictement mieux pour tout le monde (sens faible), soit que l'on fasse au moins aussi bien pour tout le monde et strictement mieux pour un individu (sens strict). On notera que faire le premier est le plus difficile que faire le second ; tout optimum de Pareto strict est un optimum de Pareto faible. Mathématiquement, (P) ⇒ (P'), ou encore $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \subset \mathcal{R}$.

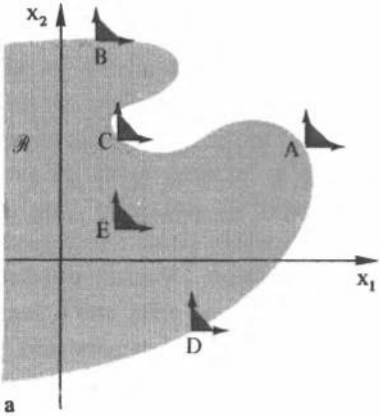


FIGURE I.17 a

$l = 1$, $m = 2$. La fonction d'utilité du premier agent est supposée être $u_1(X_1, X_2) = X_1$, celle du second $u_2(X_1, X_2) = X_2$. L'ensemble $\mathcal{R}$ est hachuré. Les cônes de sommets A, B, C, D, E indiquent les allocations unanimement préférées à celles-ci. On voit que B est un optimum de Pareto faible, A un optimum de Pareto strict, et que C, D, E ne sont pas optimales.

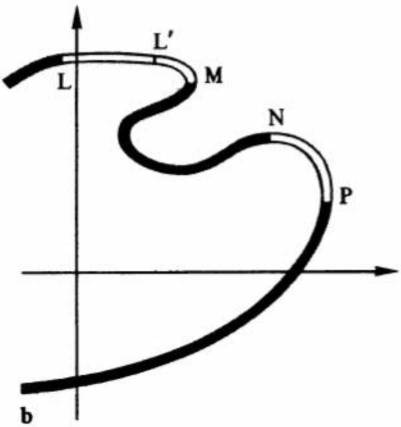


FIGURE I.17 b

Sur la même figure, on a représenté l'ensemble des optima de Pareto stricts (arcs L'M et NP) et faibles (arcs LM et NP).

L'optimalité au sens de Pareto peut être comprise de deux façons. En un sens plus économique d'abord, comme un critère de bonne gestion. Dire en effet qu'une allocation $\vec{Y}$ n'est pas un optimum de Pareto, c'est dire qu'une meilleure répartition est possible, qui permettrait d'améliorer le sort de tous : les ressources totales $\vec{\Omega}$ sont donc mal utilisées. Dire au contraire qu'une allocation $\vec{X}$ est optimale au sens de Pareto, c'est dire qu'on ne peut plus améliorer le sort d'une catégorie sociale uniquement par une meilleure utilisation des ressources existantes : il faudra demander des sacrifices à d'autres catégories. C'est une situation où l'on ne peut donner à Pierre sans prendre à Jean. Pareto lui-même donne un exemple très frappant : soit un myope et un hypermétrope, nantis chacun d'une paire de lunettes. Une situation où le premier a des verres convergents et le second des verres divergents est non-optimale. Un simple échange les amène à une situation optimale, où chacun a les lunettes qui lui conviennent, et qui ne pourra plus être améliorée.

Mais on peut aussi comprendre la notion d'optimum de Pareto en un sens plus « politique ». Introduisons ce que j'appellerai le « critère de Pareto » : si tous ses membres préfèrent $\vec{X}$ à $\vec{Y}$, la société préférera $\vec{X}$ à $\vec{Y}$. C'est le critère minimum de rationalité, le degré zéro de la politique. Dans la plupart des cas, il est insuffisant pour trancher, car il ne dit rien sur le choix collectif quand certains préfèrent $\vec{X}$ et d'autres $\vec{Y}$. C'est par exemple ce qui se passe quand $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont deux optima de Pareto différents : il n'y a aucune allocation réalisable qui soit unanimement préférée à $\vec{X}$ ou à $\vec{Y}$. En particulier, si l'on donne à choisir entre $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, les avis seront nécessairement partagés. Mathématiquement, cela s'exprime par le fait que le critère de Pareto définit sur $\mathfrak{R}$ un préordre non total (cf. définition 2.1). Ce n'est donc pas une règle de détermination des choix collectifs, au sens du paragraphe 3. Mais, pour insuffisant que soit le critère de Pareto, il n'en permet pas moins d'effectuer un premier tri dans la masse des allocations réalisables. Si l'on constate qu'à l'unanimité la société préfère $\vec{X}$ à $\vec{Y}$, il est visiblement inutile de conserver $\vec{Y}$ pour des étapes ultérieures de la discussion. On peut l'éliminer au profit de $\vec{X}$, et ainsi de suite. Seules subsistent après ce tri les allocations réalisables telles qu'aucune autre ne leur soit unanimement préférée – c'est-à-dire précisément les optima de Pareto ([1]). Le résultat suivant précise cette discussion :

(1) Dans toute cette discussion, j'ai laissé volontairement dans l'ombre la distinction entre optima de Pareto « faibles » et « stricts ». Elle dépend bien entendu de ce que l'on appelle « unanimité » : suffit-il de une voix pour et (n – 1) abstentions, ou faut-il n votes pour ?

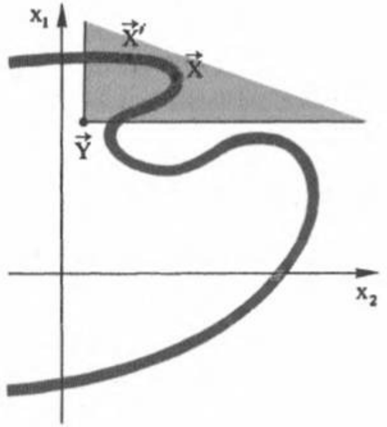


FIGURE I.18
$l = 1$, $m = 2$, $u_1\ (X_1, X_2) = X_1$, $u_2\ (X_1, X_2) = X_2$
$\vec{X}$ est un optimum de Pareto strict, unanimement préféré à $\vec{Y}$ mais il y en a d'autres, $\vec{X}'$ par exemple.

PROPOSITION 2

On suppose les préordres de préférence $\succsim_i$ continus. Alors, pour toute allocation réalisable $\vec{Y} \in \mathfrak{R}$, il existe un optimum de Pareto strict $\vec{X} \in \mathfrak{R}$ unanimement préféré à $\vec{Y}$:

$$\forall\, i,\ \ \vec{X} \succsim_i \vec{Y} \tag{6}$$

DEMONSTRATION

Soient u_i des fonctions d'utilité continues représentant les préordres totaux $\succsim_i$.

Considérons l'ensemble des allocations réalisables unanimement préférées à $\vec{Y}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}\,(\vec{Y}) &= \left\{ \vec{Z} \in \mathfrak{R} \mid \forall\ i,\ u_i\ (\vec{Z}) \geqslant u_i\ (\vec{Y}) \right\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{m} \left\{ \vec{Z} \in \mathbf{R}_+^{lm} \mid u_i\ (\vec{Z}) \geqslant u_i\ (\vec{Y}) \right\} \cap \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Il contient au moins $\vec{Y}$. Par ailleurs il est borné, puisque contenu dans $\mathfrak{R}$, et fermé, comme intersection de fermés. C'est donc un compact (cf. prop. 4.5, dem). L'ensemble des points de $\mathfrak{Z}\ (\vec{Y})$ où la fonction continue u_1 atteint son maximum est un compact non vide, noté :

$$\mathfrak{X}_1 = \left\{ \vec{X} \in \mathfrak{Z}\ (\vec{Y}) \mid \forall\ \vec{Z} \in \mathfrak{Z}\ (\vec{Y}),\ u_1\ (\vec{X}) \geqslant u_1\ (\vec{Z}) \right\}$$

On réitère l'opération. L'ensemble des points du compact $\mathcal{X}_1$ où la fonction continue u_2 atteint son maximum est un compact noté $\mathcal{X}_2$, et ainsi de suite, pour $1 \leqslant i \leqslant m - 1$.

$$\mathcal{X}_{i+1} = \left\{ \vec{X} \in \mathcal{X}_i \mid \forall\ \vec{Z} \in \mathcal{X}_i,\ u_i\ (\vec{X}) \geqslant u_i\ (\vec{Z}) \right\}$$

Soit $\vec{X}$ un point quelconque de $\mathcal{X}_m$. Je dis que $\vec{X}$ est l'optimum de Pareto cherché. Tout d'abord, on vérifie aisément que :

$$\mathcal{Z}\ (\vec{Y}) \supset \mathcal{X}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{X}_i \supset \ldots \supset \mathcal{X}_m.$$

Donc $\vec{X} \in \mathcal{Z}\ (\vec{Y})$, c'est-à-dire que c'est une allocation réalisable unanimement préférée à $\vec{Y}$.

Soit maintenant $\vec{T} \in \mathcal{R}$ tel que $u_i\ (\vec{T}) \geqslant u_i\ (\vec{X})$ pour tout *i*. On aura donc $u_i\ (\vec{T}) \geqslant u_i\ (\vec{Y})$ pour tout *i*. Donc $\vec{T} \in \mathcal{Z}\ (\vec{Y})$. Comme $u_1\ (\vec{T}) \geqslant u_1\ (\vec{X})$, et que $\vec{X}$ maximisait u_1 sur $\mathcal{Z}\ (\vec{Y})$, on doit avoir en réalité $u_1\ (\vec{T}) = u_1\ (\vec{X})$. En particulier $\vec{T} \in \vec{X}_1$. Comme $u_2\ (\vec{T}) \geqslant u_2\ (\vec{X})$, et que $\vec{X}$ maximisait u_2 sur $\vec{X}_1$, on doit avoir en réalité $u_2\ (\vec{T}) = u_2\ (\vec{X})$, et $\vec{T} \in \vec{X}_2$. On démontre ainsi de proche en proche que $u_i\ (\vec{T}) = u_i\ (\vec{X})$, c'est-à-dire que $\vec{T} \sim_i \vec{X}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Donc X est bien un optimum de Pareto strict.

La proposition 2 implique en particulier l'existence d'optima de Pareto pourvu que les préordres de préférence soient continus (choisir $\vec{Y}$ arbitrairement). On peut se demander si le procédé de la proposition 1 permet de les décrire

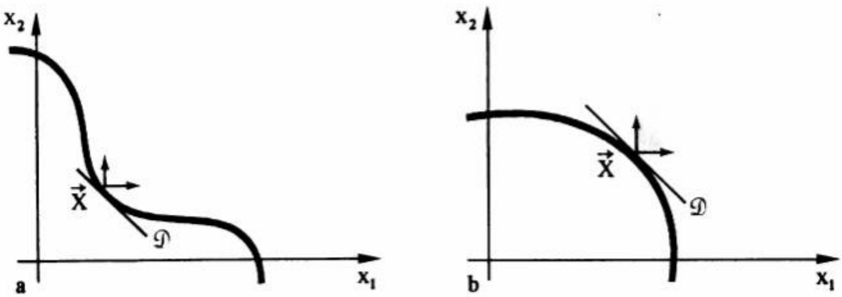


FIGURE I.19

$l = 1$, $m = 2$, $u_1\ (X_1, X_2) = X_1$, $u_2\ (X_1, X_2) = X_2$

Dans la figure **a**, $\vec{X}$ a beau être un optimum de Pareto, il ne maximise aucune combinaison linéaire des u_i. Par contre, dans la figure **b**, tout optimum de Pareto maximise une certaine combinaison linéaire des u_i, représentée par la droite $\mathcal{D}$ passant par $\vec{X}$.

tous. Dans le cas général, la réponse est négative, comme il est aisé de s'en convaincre sur un dessin (fig. I.19). C'est vrai cependant dans un cas particulier important : lorsque les fonctions d'utilité u_i sont concaves.

PROPOSITION 3

Soient u_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, des fonctions d'utilité continues et concaves représentant les préordres de préférence $\succsim_i$. Soit $X \in \mathcal{R}$ un optimum de Pareto faible. Il existe alors une famille $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de coefficients positifs, de somme un, telle que $\vec{X}$ maximise $u_s^\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des allocations réalisables :

$$\vec{Y} \in \mathcal{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ u_i\ (\vec{X}) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ u_i\ (\vec{Y})$$

La démonstration passe par deux étapes, qui ont leur intérêt propre. C'est surtout pour nous l'occasion de voir apparaître le théorème de Minkowski, qui jouera un si grand rôle à partir du chapitre III. On remarquera que la conclusion reste vraie a fortiori si $\vec{X}$ est un optimum de Pareto strict.

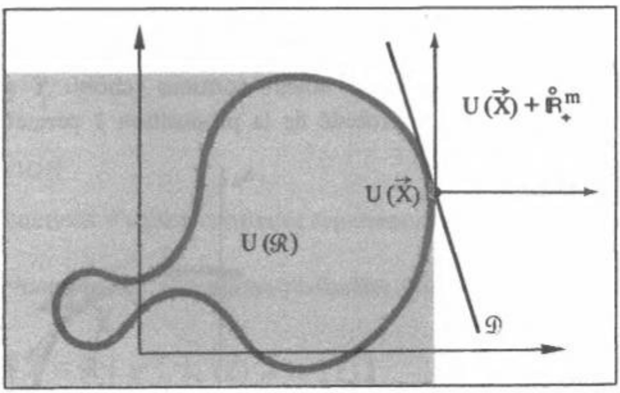


FIGURE I.20

$m = 2$. On a grisé l'ensemble $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^m$ (y compris le bord). Le cône $U(\vec{X}) + \mathring{\mathbb{R}}_+^m$ est ouvert (ne contient pas son bord). Le principe de la démonstration de la proposition 3 est de faire passer entre eux une droite $\mathcal{D}$.

LEMME 1

Soit U l'application de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$U(\vec{X}) = (u_1(\vec{X}), \ldots, u_n(\vec{X}))$$

Si les u_i sont concaves, l'ensemble $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^n$ est convexe :

$$U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^n = \left\{ (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{X} \in \mathcal{R} : u_i(\vec{X}) \geqslant v_i \ \forall i \right\}$$

DEMONSTRATION

Soient $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ deux points de $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^n$, et λ un nombre compris entre 0 et 1. Il s'agit de montrer que $\lambda \vec{v} + (1 - \lambda) \vec{w}$ appartient encore à $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^n$. On a :

$$\exists \vec{X} \in \mathcal{R} : u_i(\vec{X}) \geqslant v_i \ \forall i$$

$$\exists \vec{Y} \in \mathcal{R} : u_i(\vec{Y}) \geqslant w_i \ \forall i$$

En multipliant la première ligne par λ, la seconde par $(1 - \lambda)$, et en ajoutant :

$$\forall i, \lambda u_i(\vec{X}) + (1 - \lambda) u_i(\vec{Y}) \geqslant \lambda v_i + (1 - \lambda) w_i$$

Utilisons l'inégalité de concavité :

$$\lambda u_i(\vec{X}) + (1 - \lambda) u_i(\vec{Y}) \leqslant u_i(\lambda \vec{X} + (1 - \lambda) \vec{Y})$$

Comme $\mathcal{R}$ est convexe, $\lambda \vec{X} + (1 - \lambda) \vec{Y} = \vec{Z} \in \mathcal{R}$. Ceci donne finalement le résultat désiré :

$$\forall i, u_i(\vec{Z}) \geqslant \lambda v_i + (1 - \lambda) w_i$$

LEMME 2

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{X}$ soit un optimum de Pareto faible est que :

$$(U(\vec{X}) + \mathring{\mathbb{R}}_+^m) \cap (U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^m) = \phi \tag{7}$$

DEMONSTRATION

Dire que cette intersection est non vide signifie précisément que l'on peut trouver un point $\vec{Y} \in \mathcal{R}$, des nombres $p_i > 0$ et $q_i \geqslant 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que :

$$\forall i, \ u_i(\vec{X}) + p_i = u_i(\vec{Y}) - q_i$$

Ceci revient à dire que $u_i(y_i) > u_i(x_i)$ pour tout i, c'est-à-dire que $\vec{X}$ n'est pas un optimum de Pareto faible.

J'énonce maintenant un résultat de portée très générale :

THEOREME DE MINKOWSKI

Soient dans $\mathbb{R}^m$ *deux convexes non vides disjoints :*

$$C_1 \neq \phi, \; C_2 \neq \phi, \; C_1 \cap C_2 = \phi$$

On peut trouver une famille $a = (a_1, \ldots, a_m)$ *de coefficients non tous nuls et un nombre* b *tels que :*

$$\forall \vec{x} \in C_1, \; \forall \vec{y} \in C_2, \; \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b \leq \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \tag{8}$$

Si en outre l'un des convexes est fermé et l'autre compact, il existera une famille $a = (a_1, \ldots, a_m)$ *de coefficients non tous nuls, deux nombres* b_1 *et* b_2 *distincts, tels que :*

$$\forall \vec{x} \in C_1, \; \forall \vec{y} \in C_2, \; \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b_1 < b_2 \leq \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \tag{9}$$

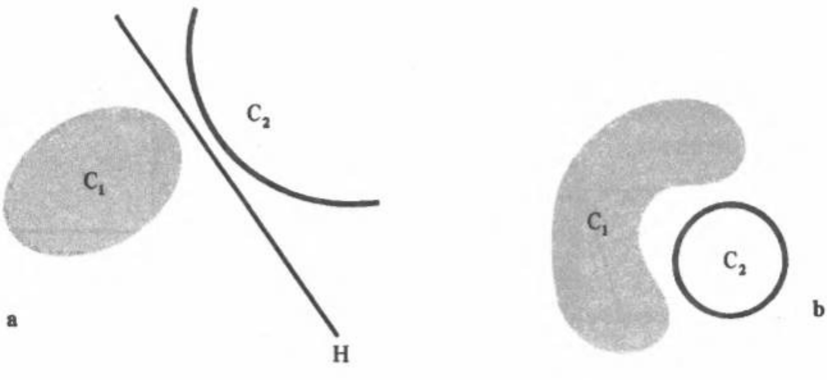


FIGURE I.21

Le théorème de Minkowski affirme qu'entre deux convexes disjoints C_1 et C_2 on peut faire passer un hyperplan H. C'est bien le cas en **a**, mais non en **b** (C_1 non convexe).

Ce théorème a une interprétation géométrique simple. L'ensemble des points $\vec{z}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i = b$ est ce qu'on appelle un hyperplan. Si b = 0, c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$. L'hyperplan H, d'équation $\sum_{i=1}^{m} a_i z_i = b$, sépare l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$ en deux parties : une région $\mathcal{F}_1$ où $\sum_{i=1}^{m} a_i z_i \leqslant b$, et une région $\mathcal{F}_2$ où $\sum_{i=1}^{m} a_i z_i \geqslant b$. On les appelle les demi-espaces fermés limités par H. Le théorème de Minkowski affirme simplement que si C_1 et C_2 sont convexes disjoints, on peut choisir un hyperplan H de telle sorte que $C_1 \subset \mathcal{F}_1$ et $C_2 \subset \mathcal{F}_2$.. La séparation ainsi faite n'est pas stricte : on remarquera que $H \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. La formule (8) n'exclut nullement que H rencontre C_1 ou C_2, ni même qu'il les contienne tous les deux ! Si l'on veut un résultat plus précis, il faut faire des hypothèses plus fortes : c'est le but de la deuxième partie du théorème. Si l'on pose $b = (b_1 + b_2)/2$, la formule (9) montre que l'hyperplan H d'équation $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = b$ ne rencontre ni C_1 ni C_2. Chacun de ces convexes appartient à l'un des demi-espaces ouverts limités par l'hyperplan H : la région $\mathcal{O}_1$ où $\sum_{i=1}^{m} a_i z_i < b$ et la région $\mathcal{O}_2$ où $\sum_{i=1}^{m} a_i z_i > b$. On remarquera qu'ils sont disjoints entre eux et de H. En outre, $\mathbb{R}^m = \mathcal{O}_1 \cup H \cup \mathcal{O}_2$. Je ne donne pas la démonstration de ce théorème puissant, mais je vais l'utiliser pour démontrer la proposition 3.

DEMONSTRATION

D'après le lemme 1, l'ensemble $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+$ est convexe. L'ensemble $U(\vec{X}) + \mathring{\mathbb{R}}^m_+$ est le translaté du cône convexe $\mathring{\mathbb{R}}^m_+$ par le vecteur $U(\vec{X})$; il est donc convexe lui aussi. D'après le lemme 2, ils sont disjoints. D'après le théorème de Minkowski, on peut trouver une famille de coefficients $a = (a_1, \ldots, a_m)$ et un nombre b tels que :

$$\forall \vec{v} \in U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \leqslant b \tag{10}$$

$$\forall \vec{w} \in U(\vec{X}) + \mathring{\mathbb{R}}^m_+, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i w_i \geqslant b.$$

Cette dernière équation s'écrit aussi, en posant $w_i = u_i(\vec{X}) + t_i$, avec $t_i > 0$:

$$\forall \vec{t} \in \mathring{\mathbb{R}}^m_+, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i t_i \geqslant b - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i(\vec{X}) \tag{11}$$

On en déduit aussitôt que les coefficients a_i sont tous positifs. Si en effet on avait $a_j < 0$ pour un certain j, on poserait $t_i = 0$ pour $i \neq j$, et on ferait tendre t_j vers $+\infty$ dans l'inégalité (11). Le membre de gauche tendrait vers $-\infty$, celui de droite restant fixe, ce qui est absurde.
On peut aussi, dans cette même inégalité, faire tendre les t_i vers zéro (bien qu'on n'ait pas le droit de poser $t_i = 0$). On obtient :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\, u_i\, (\vec{X}) \geqslant b \tag{12}$$

Passons maintenant à l'inégalité (10). Elle nous apprend que, pour tout $\vec{Y} \in \mathcal{R}$, et toute famille $(p_1, \ldots, p_m)$ de coefficients positifs, on a :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\, (u_i\, (\vec{Y}) - p_i) \leqslant b$$

On a le droit de prendre les p_i tous nuls, ce qui donne :

$$\forall\, \vec{Y} \in \mathcal{R},\ \sum_{i=1}^{m} a_i\, u_i\, (\vec{Y}) \leqslant b \tag{13}$$

On peut diviser les inégalités (12) et (13) par $\sum_{i=1}^{m} a_i$, qui est non nul puisque les a_i sont positifs et non tous nuls. En posant $\alpha_i = a_i / \sum_{i=1}^{m} a_i$, on obtient :

$$\forall\, \vec{Y} \in \mathcal{R},\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, u_i\, (\vec{Y}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, u_i\, (\vec{X}),$$

ce qui est le résultat désiré.

La boucle est bouclée. Le moment est venu de nous demander quelle est la signification de ces familles de coefficients $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ qui sont si étroitement associés aux optima de Pareto. Choisir α, c'est définir une fonction d'utilité collective $u_\alpha^s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, u_i$; c'est retenir, parmi tous les optima de Pareto, celui ou ceux qui la maximisent. C'est donc résoudre le problème du partage. Convenir d'une fonction d'utilité collective, c'est imposer un arbitrage aux individus. Le simple fait d'écrire $u_s^\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, u_i$ implique qu'il revient au même d'augmenter u_i de $1/\alpha_i$ et u_j de $1/\alpha_j$. Une unité d'utilité de l'individu *i* « vaut » α_i/α_j unités d'utilité de l'individu j. Le cas extrême est celui où $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$; alors $u_s^\alpha = u_1$, et on retrouve la dictature de l'agent 1.

Rappelons une fois de plus que nous n'avons pas trouvé de manière naturelle, ou même rationnelle, de faire ce choix. En premier lieu, comme nous en avons déjà discuté, le choix des fonctions d'utilité individuelles comporte une large part d'arbitraire. Mais on rencontre aussi une difficulté nouvelle : comment comparer les utilités d'individus différents ? Sur quel fondement s'appuyer pour décréter qu'il est bon de diminuer u_i de c α_i pourvu qu'on augmente u_j de c α_j – c'est-à-dire que les avantages pour les uns l'emportent sur les inconvénients pour les autres ? Certes, de tels raisonnements sont courants, et ils peuvent même s'appuyer sur des précédents glorieux (Ricardo combattant les Corn Laws). Mais ils intègrent des éléments idéologiques étrangers au cadre purement économique qui a été le nôtre. D'un point de vue strictement expérimental, ajouter les utilités d'individus différents, fût-ce en les pondérant par des coefficients, a autant de sens que d'ajouter les températures de corps dif-dérants, sous prétexte qu'elles sont toutes exprimées en Fahrenheit !

Certes, rien n'empêche de choisir, d'une manière ou d'une autre, un optimum de Pareto parmi les autres. Cela se traduira, au moins dans le cas convexe, par le choix d'une famille $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de coefficients. Nous voyons des partages s'effectuer sous nos yeux, depuis le cadre de notre famille jusqu'à l'échelle de la planète, et nous faisons journellement la triste constatation que l'optimum dictatorial $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ n'est pas le moins utilisé. Je ne prétends donc pas que le choix est impossible. Je dis qu'il est de nature politique, car les éléments économiques à eux seuls ne permettent pas d'en décider. Les coefficients α_i traduisent alors le poids respectif des divers individus. Ainsi, la notion d'optimum de Pareto marque la frontière entre l'économie et la politique. L'économiste se borne à prescrire les optima, c'est-à-dire à s'assurer que l'économie fonctionne sans gaspillage. A partir de là, c'est au politique de prendre la relève, et de dire quel optimum sera le bon.

II. Economies de propriété privée : le noyau

Le chapitre précédent a isolé parmi les allocations réalisables, les optima de Pareto. On les caractérise par le fait qu'il n'est pas possible d'augmenter simultanément l'utilité de tous les agents, ou encore qu'il n'y a pas d'allocation réalisable qui leur soit unanimement préférée. Ceci peut être considéré, soit comme un critère de bonne gestion économique, soit comme une règle de rationalité collective.

La question se pose de savoir si on ne peut à leur tour isoler, parmi les optima de Pareto, d'autres allocations remarquables. L'analyse que nous avons menée, particulièrement le théorème d'Arrow, montre que cela ne peut se faire sans l'intervention de facteurs supplémentaires. L'élément nouveau qui va jouer dans ce chapitre est la propriété privée des ressources initiales : elles ne seront plus attribuées en bloc à la collectivité, mais réparties entre les individus. En d'autres termes, on part d'une situation acquise. Grâce à cela, nous allons pouvoir définir de nouveaux critères qui permettront de rejeter beaucoup d'optima de Pareto. Ceux qui subsisteront formeront ce qu'on appelle le noyau de l'économie.

Dans l'élaboration de ces nouveaux critères, les coalitions d'agents joueront un rôle fondamental. Ce sont des êtres intermédiaires entre l'individu et la collectivité, les pendants théoriques des syndicats, cartels et autres associations de la réalité économique. L'importance de leur action est telle qu'elle mérite une analyse à part, dans un cadre approprié, qui est celui des jeux coopératifs. Les deux premiers paragraphes de ce chapitre leur seront consacrés, et nous attendrons le troisième pour rejoindre l'univers économique décrit au Chapitre I.

1. Coalitions

Nous considérons, comme précédemment, une collectivité de m agents. La société toute entière, consensus de m individus, est notée S. Mais on peut aussi envisager des regroupements partiels, associations de $k < m$ individus : ce seront les coalitions. La définition précise est très facile.

DEFINITION

On appelle *coalition* toute partie de S.

On peut prendre, par exemple, S elle-même : c'est la grande coalition. Mais l'agent i peut aussi constituer une coalition, notée $\{i\}$, à lui tout seul. Entre ces deux extrêmes se situe toute la gamme des coalitions à $2, 3, \ldots, m-1$ personnes. D'après la définition, il faut également considérer la partie vide ϕ comme une coalition (à 0 membre). Si par exemple on prend $m = 3$, on trouve 8 coalitions possibles :

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

L'ensemble des coalitions n'est autre que $\mathcal{P}$ (S), ensemble des parties de S. On sait que, si S a m éléments, $\mathcal{P}$ (S) en a 2^m. Il ne faut pas s'attendre cependant à ce que toutes les coalitions possibles voient le jour simultanément. Une certaine communauté d'intérêts est nécessaire pour que des individus envisagent de s'associer. Encore faut-il qu'ils contractent effectivement alliance, car nombreuses sont les associations naturelles qui se disputent les faveurs de chacun. Seules se formeront finalement certaines coalitions. L'ensemble des coalitions formées sera notée $\mathcal{C}$, c'est une partie de $\mathcal{P}$ (S). Les coalitions qui n'appartiennent pas à $\mathcal{C}$ n'ont qu'une existence virtuelle : elles n'influenceront pas le déroulement des opérations. On dira que $\mathcal{C}$ est une *structure de coalitions.*

Parmi les structures de coalitions, celles qui sont « équilibrées » jouent un rôle particulier. Elles apparaissent inéluctablement au cours des démonstrations, mais la véritable raison de leur importance est encore mal connue. Je vais tout de même en donner une présentation intuitive, quitte à en biaiser quelque peu la compréhension. Nous nous engageons maintenant sur un raccourci, pour arriver plus immédiatement à la notion de structure équilibrée de coalitions. Quand nous l'aurons atteinte, nous devrons oublier les étapes intermédiaires.

Nous penserons les coalitions comme représentant leurs membres. Supposons que ce soit la structure $\mathcal{C}$ qui se soit imposée : seules se sont formées les coalitions de $\mathcal{C}$. Celles-ci sont alors des personnes morales entre les mains desquelles les individus ont abdiqué leur souveraineté. Si l'agent *i* est un farouche individualiste, il formera la coalition $\{i\}$, et toutes les autres devront se passer de lui. Dans ces conditions, on peut considérer comme naturelles les structures $\mathcal{C}$ satisfaisant à la règle que tout individu est représenté par une coalition au moins :

$$\forall\, i \in S, \quad \exists\, C \in \mathcal{C} : \; i \in C. \tag{1}$$

On songe d'abord aux structures disjointes : un individu ne peut pas appartenir à deux coalitions à la fois. Mathématiquement,

$$C \in \mathcal{C} \;\text{ et }\; D \in \mathcal{C} \Rightarrow C \cap D = \phi. \tag{2}$$

Si on leur impose en plus d'être naturelles, c'est-à-dire de satisfaire à la règle (1), on obtient toutes les partitions de S.

Mais la condition (2) est bien stricte : il est très courant qu'une même personne soit membre de plusieurs organisations, qui défendent ses intérêts à des titres divers. Mais si l'individu *i* appartient à la fois à la coalition C et à la coalition D, il ne peut être représenté pleinement ni par C ni par D, puisque l'une et l'autre se réclament de lui. Nous lui attribuerons à chacune un certain « pourcentage de représentativité » ; c'est-à-dire que nous nous donnerons deux nombres $\alpha^i_C > 0$ et $\alpha^i_D > 0$, de somme unité, et nous conviendrons que la coalition C représente la fraction α^i_C de l'individu *i*, et D la fraction α^i_D. Le fait que $\alpha^i_C + \alpha^i_D = 1$ exprime simplement que, à elles deux, les coalitions C et D représentent pleinement l'individu *i* : elles se le sont en quelque sorte partagé. Ce dispositif s'adapte sans difficulté au cas où l'agent *i* appartient, non plus à deux coalitions, mais à trois, quatre ou plus. Ainsi, chaque coalition $C \in \mathcal{C}$ est affectée d'une famille de coefficients $(\alpha^i_C)_{i \in C}$, où α^i_C est la fraction de l'individu *i* représentée par C.

Nous nous imposerons alors une seconde règle : chaque coalition représente également tous ses membres. Mathématiquement, si *i* et *j* appartiennent tous deux à $C \in \mathcal{C}$, alors $\alpha_C^i = \alpha_C^j$; on conviendra de noter α_C leur commune valeur. A chaque coalition $C \in \mathcal{C}$, on peut donc associer un nombre $\alpha_C > 0$, qui est la fraction de chacun de ses membres qu'elle représente. Mais si on se place du point de vue de l'individu i, on constate qu'il a été partagé entre les coalitions de $\mathcal{C}$, et qu'en réunissant ses fractions éparses on doit retrouver l'unité. D'où la relation :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, i \in S, \quad \sum\limits_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C = 1 \\ \text{où} \quad \mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} \mid C \ni i\} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

On remarquera que la relation (3) implique la relation (1) : si la somme des α_C pour $C \in \mathcal{C}_i$ est égale à un, l'un au moins est non nul. Si la structure $\mathcal{C}$ est supposée disjointe, les relations (3) et (1) sont même équivalentes.

Il s'avère que cette seconde règle limite considérablement les possibilités. On dira qu'une structure de coalition $\mathcal{C}$ est ***équilibrée*** s'il est possible d'associer à chaque $C \in \mathcal{C}$ un nombre $\alpha_C > 0$ de telle sorte que la condition (3) soit vérifiée. Toute structure disjointe et naturelle est équilibrée, puisque chaque coalition représente pleinement chacun de ses membres (prendre $\alpha_C = 1$ pour tout $C \in \mathcal{C}$). Par contre, la structure à deux coalitions $\mathcal{C} = [I, S]$, où $I = \{i\}$, n'est pas équilibrée. En effet, les individus autres que i ne sont représentés que par S ; d'où $\alpha_S = 1$. Mais en exprimant la relation (3) pour l'individu i, on obtient $\alpha_I + \alpha_S = 1$, d'où $\alpha_I = 0$.

Si l'on reprend l'exemple d'une société de trois agents, on trouve comme structures équilibrées :

$\mathcal{C}_1 = [\{1, 2, 3\}]$, $\qquad \mathcal{C}_2 = [\{1\}, \{2\}, \{3\}]$,

$\mathcal{C}_3 = [\{1\}, \{2, 3\}]$, $\qquad \mathcal{C}_4 = [\{2\}, \{1, 3\}]$,

$$\mathcal{C}_5 = [\{3\}, \{1, 2\}],$$

qui sont disjointes,

$$\mathcal{C}_6 = [\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}]$$

qui ne l'est pas, et toutes les réunions de celles-ci, ainsi $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_6$. La structure $\mathcal{C} = [\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}]$, par exemple, n'est pas équilibrée. Nous voilà arrivés où nous voulions, et nous pouvons maintenant donner la définition formelle :

DEFINITION 1

Une *structure équilibrée de coalitions* est une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(S)$ telle que, à toute coalition $C \in \mathcal{C}$ on puisse associer un nombre $\alpha_C > 0$ vérifiant :

$$\left.\begin{array}{ll} & \forall\, i \in S, \quad \sum\limits_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C = 1 \\ \text{où} & \mathcal{C}_i = \left\{ C \in \mathcal{C} \mid C \ni i \right\} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Etant donnée une structure équilibrée $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(S)$, les coefficients α_C, $C \in \mathcal{C}$, sont-ils déterminés de manière unique ? Il n'en est rien en général ; si $\mathcal{C} = \left\{ S, \left\{ i \right\} \mid i \in S \right\}$, on peut prendre $\alpha_S = \alpha$ et $\alpha_i = 1 - \alpha$, pour tout nombre $\alpha \in \,]0, 1[$. C'est toutefois le cas si la structure $\mathcal{C}$ est *minimale*, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ ne contient aucune structure $\mathcal{C}'$ qui soit elle-même équilibrée :

$$\mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(S) \Rightarrow \mathcal{C}' \text{ non équilibrée.} \tag{4}$$

PROPOSITION 2

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(S)$ une structure équilibrée minimale. Alors :

(a) il existe une et une seule famille de coefficients $\alpha_C > 0$ vérifiant les relations (3),

(b) $\mathcal{C}$ contient au plus m *coalitions.*

DEMONSTRATION

(a) Soient $\alpha_C > 0$ et $\beta_C > 0$, où $C \in \mathcal{C}$, deux familles distinctes de coefficients vérifiant les relations (3). Alors la famille $\gamma_C^t = \alpha_C + t\,(\beta_C - \alpha_C)$ vérifie encore les relations (3) ; reste à savoir si elle satisfait aussi aux conditions de positivité. Pour $t = 0$, $\gamma_C^t = \alpha_C$ et pour $t = 1$, $\gamma_C^t = \beta_C$; pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, γ_C^t appartient à l'intervalle d'extrémités α_C et β_C, et est donc strictement positif. Par hypothèse, il existe une coalition $D \in \mathcal{C}$ telle que $\alpha_D \neq \beta_D$; on a donc $\alpha_D > \beta_D$ ou $\alpha_D < \beta_D$. Dans ce dernier cas, les relations $\sum\limits_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C = \sum\limits_{C \in \mathcal{C}_i} \beta_C$ pour tout $i \in D$ montrent que l'on peut trouver une coalition E avec $\alpha_E > \beta_E$. On se ramène donc à une coalition $D \in \mathcal{C}$ telle que $\alpha_D > \beta_D$. Mais alors γ_D^t devient négatif pour $t \geqslant t_D = \alpha_D\,(\alpha_D - \beta_D)^{-1}$. En prenant le plus petit des t_D possibles :

$$\tau = \min \left\{ t_D \mid D \in \mathcal{C},\ \alpha_D > \beta_D \right\} \tag{5}$$

on vérifie que $\gamma_C^t > 0$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, tant que $t < \tau$. Si $t = \tau$, on aura $\gamma_C^t > 0$ pour tous les C de $\mathcal{C}$, sauf ceux qui réalisent le minimum dans la formule (5).

$$\gamma_C^\tau = 0 \Leftrightarrow [C \in \mathcal{C},\ (1 - \beta_C/\alpha_C)^{-1} = \min_{\mathcal{C}}]$$

Le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des coalitions C telles que $\gamma_C^\tau > 0$ est visiblement une structure équilibrée. Donc $\mathcal{C}$ n'était pas minimale.

(b) Les relations (3) constituent un système de *m* équations linéaires (une pour chaque $i \in S$) où les inconnues sont les α_C (pour chaque $C \in \mathcal{C}$). Nous notons *s* le nombre d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le nombre d'inconnues. Dire que la structure $\mathcal{C}$ est équilibrée, c'est-à-dire que le système (3) comporte au moins une solution dans $\mathring{\mathbb{R}}_+^s$ ($\alpha_C > 0\ \forall\ C \in \mathcal{C}$). Si $s > m$, c'est-à-dire s'il y a plus d'inconnues que d'équations, les solutions du système (3) constitueront dans $\mathbb{R}^s$ un sous-espace affine de dimension $\geqslant s - m$. Un tel sous-espace rencontre $\mathring{\mathbb{R}}_+^s$ en plus d'un point, chacun d'eux définissant une famille de coefficients $\alpha_C > 0$ vérifiant les relations (3). D'après la partie (a), la structure équilibrée $\mathcal{C}$ ne saurait être minimale.

On vérifie immédiatement que les structures naturelles disjointes (c'est-à-dire les partitions de S) sont équilibrées et minimales. Plus généralement :

PROPOSITION 3

Toute structure de coalitions équilibrées contient une structure minimale.

DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{C}$ une structure équilibrée. Si $\mathcal{C}$ ne contient aucune structure équilibrée, alors $\mathcal{C}$ est minimale. Si $\mathcal{C}$ contient une structure équilibrée $\mathcal{C}'$, celle-ci doit contenir moins d'éléments que $\mathcal{C}$. En réitérant l'opération, on obtient une suite de structures équilibrées emboîtées :

$$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{C} \supset \mathcal{C}' \supset \mathcal{C}'' \ldots$$

$$2^m > \text{Card } \mathcal{C} > \text{Card } \mathcal{C}' > \text{Card } \mathcal{C}'' \ldots$$

où Card désigne le nombre d'éléments. Comme il ne saurait tomber en dessous de 1, cette suite est nécessairement finie. Son dernier terme $\mathcal{C}^{(n)}$ est la structure minimale cherchée.

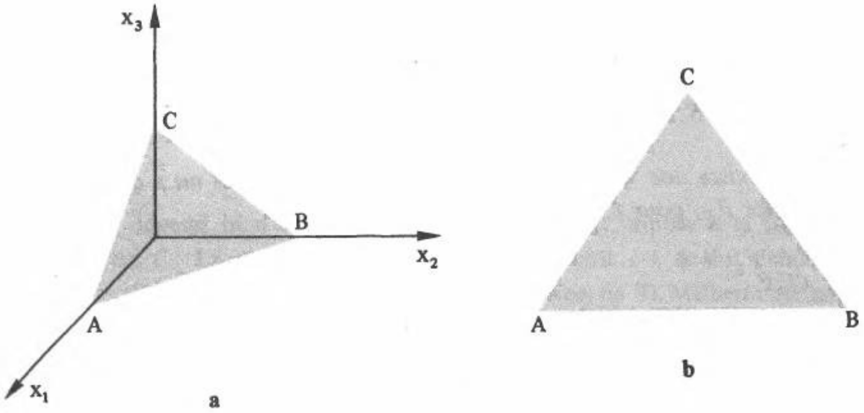


FIGURE II.1

Le simplexe Σ (S) pour m = 3. L'espace ambiant est de dimension trois, mais le simplexe lui-même est de dimension deux. C'est le triangle équilatéral ABC **(a)**; il est plus simple de le représenter dans son plan **(b)**.

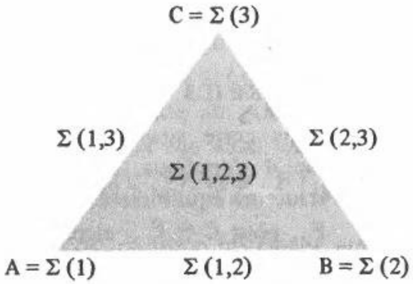


FIGURE II.2

On a indiqué toutes les faces du simplexe précédent.

Maintenant que l'outil est bien en main, cherchons à l'utiliser. Pour cela, il nous faut encore introduire quelques notations. Soit $f > 0$ une constante ; on considère le *simplexe* :

$$\Sigma\ (S) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^m \mid x_1 + \ldots + x_m = f \right\}$$

A toute coalition $A \subset S$, on associe la face Σ (A) du simplexe Σ (S) :

$$\Sigma\ (A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^m \mid x_i = 0 \quad \forall\, i \notin A \quad \text{et} \quad \sum_{i \in A} x_i = f \right\}$$

On a $\Sigma\ (A) \subset \Sigma\ (S) \subset \mathbb{R}_+^m$. Le théorème suivant, dû à Shapley (1973), est un résultat très profond sur la géométrie de ces simplexes.

THEOREME 4

A toute coalition $A \subset S$, associons un fermé (éventuellement vide) $F_A \subset \Sigma(S)$, de telle sorte que :

$$\forall B \subset S, \quad \Sigma(B) \subset \bigcup_{A \subset B} F_A \qquad (6)$$

Alors il existe une structure équilibrée $\mathcal{C}$ de coalitions et un $\vec{x}$ qui appartient à tous les F_C, pour $C \in \mathcal{C}$:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} F_C \neq \phi \qquad (7)$$

C'est vraiment le résultat mathématique fondamental de ce chapitre et du suivant. Heureusement il est susceptible d'une interprétation simple. Imaginons que les *m* agents aient à se partager une somme d'argent f donnée. Tout vecteur $\vec{x}$ de Σ (S) représente alors un partage possible : la $i^{ème}$ composante x_i est le lot qui échoit à l'agent *i*. Les vecteurs $\vec{y}$ de Σ (A) représentent alors les partages où tout revient aux membres de A et rien aux autres. Ce sont les allocations réalisables qui favorisent la coalition A, dans l'hypothèse où l'argent est un bien que l'on désire.

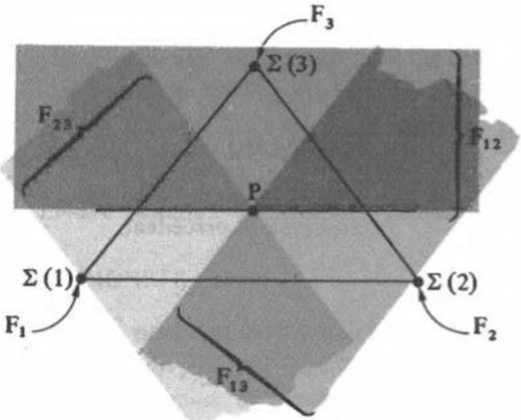


FIGURE II.3

Dans cette situation, le théorème 4 s'applique, et il y a une structure équilibrée $\mathcal{C}$ telle que les F_c, pour $C \in \mathcal{C}$, aient un point commun : il s'agit de ($\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$) et du point P, de coordonnées (1/3, 1/3, 1/3).

Le partage a lieu selon certaines règles que résument les F_A, $A \in \mathcal{P}$ (S). Les vecteurs de F_A représentent les allocations réalisables que la coalition A considère comme acceptables. En d'autres termes, si on met sur le tapis une proposition de répartition $\vec{x} \in \Sigma$ (S), la coalition A l'acceptera si $\vec{x}$ appartient à F_A, et la rejettera sinon. Encore faut-il que la coalition A se soit effectivement formée, c'est-à-dire que A appartienne à la structure $\mathcal{C}$ de coalitions existantes. On peut alors se demander si l'on peut choisir cette structure $\mathcal{C}$ de telle sorte que les exigences des diverses coalitions C de $\mathcal{C}$ soient compatibles. Le partage pourrait alors être fait d'une manière qui convienne à tous les $C \in \mathcal{C}$: c'est justement ce qu'exprime la condition (7).

La réponse dépend bien entendu des conditions qu'on impose à la structure de coalitions $\mathcal{C}$. La première idée qui vient à l'esprit est de lui demander d'être naturelle et disjointe ($\mathcal{C}$ sera donc une partition de S). Malheureusement l'exemple suivant, où f = 1 et $S = \{1, 2, 3\}$:

$$F_S = \phi$$
$$F_{\{i,j\}} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3_+ \mid x_i + x_j \geqslant 1/3 \}$$
$$F_{\{i\}} = \{ (\delta^i_1, \delta^i_2, \delta^i_3) \} \text{ (1)}$$

montre que la réponse peut être négative. En effet, on a $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} F_C = \phi$ pour toute structure naturelle disjointe,

$$\mathcal{C} = [S], \quad \mathcal{C} = [\{1\}, \{2\}, \{3\}], \quad \text{ou } \mathcal{C} = [\{i\}, \{j, k\}].$$

Par contre, il existe une structure équilibrée de coalitions vérifiant la condition (7), à savoir $\mathcal{C} = [\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}]$: l'intersection des F_C pour $C \in \mathcal{C}$ est réduite au point (1/3, 1/3, 1/3). On constate d'ailleurs que la condition (6) est elle aussi vérifiée, puisque $F_{\{i\}}$ est égal à $\Sigma(\{i\})$, $F_{\{i,j\}}$ contient $\Sigma(\{i, j\})$, et les $F_{\{i,j\}}$ recouvrent $\Sigma(\{1, 2, 3\})$.

Le théorème exprime justement que, moyennant la condition (6), il est toujours possible de trouver une structure de coalitions équilibrée $\mathcal{C}$, et une répartition $\vec{x} \in \Sigma(S)$ qui soit acceptable pour tous les $C \in \mathcal{C}$. La condition (6) est que, quelle que soit la répartition $\vec{x} \in \Sigma(A)$, il se trouve toujours un membre ou une sous-coalition de A pour la considérer comme acceptable. C'est une hypothèse très naturelle, puisque $\Sigma(A)$ représente les partages qui avantagent le plus la coalition A. Elle est par exemple réalisée si $\Sigma(A) \subset F_A$, mais c'est loin d'être le cas général. Très fréquemment, on a $F_A = \phi$, ce qui signifie que, pour des raisons qu'on ignore, la coalition A ne peut pas se former. Remarquons toutefois que la condition (6), appliquée à B = S, nous donne

---

(1) δ^i_j est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

$\Sigma\ (S) = \bigcup_{A \subset S} F_A$, ce qui exprime que toute répartition possible est acceptable pour une coalition au moins. En particulier, les F_A ne peuvent pas tous être vides.

Il est hors de question de démontrer le théorème 4. Je vais plutôt l'illustrer par deux corollaires célèbres, qui portent les noms des mathématiciens polonais Knaster, Kuratowski et Mazurkiewicz (en abrégé K K M).

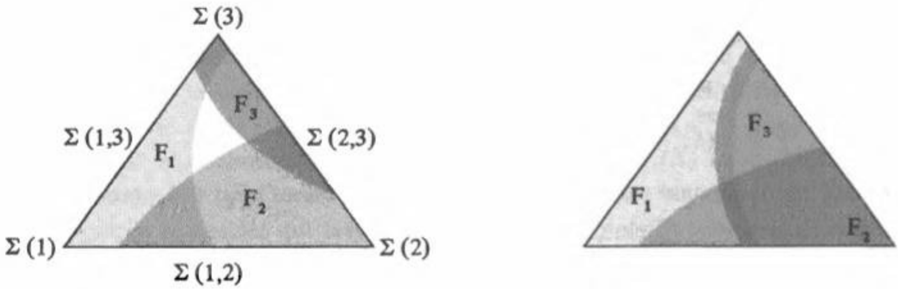


FIGURE II.4

Le grand KKM m = 3. Dans la figure de gauche, les trois fermés, F_1 F_2 F_3 ne satisfont pas aux hypothèses voulues puisqu'ils ne recouvrent pas le simplexe (prendre A = S dans la formule (8)) ; on constate qu'il n'y a pas de point commun à tous les trois. Dans la figure de droite, par contre, toutes les hypothèses de KKM sont satisfaites, et on constate que leur intersection est non vide : c'est la partie triplement grisée.

COROLLAIRE 5 (Grand K K M)

Soit $S = \{1, \ldots, m\}$. *Dans le simplexe* $\Sigma\,(S)$ *on considère* m *fermés* $F_1, \ldots, F_m$ *dotés de la propriété suivante :*

$$\forall A \subset S, \Sigma\,(A) \subset \bigcup_{i \in A} F_i \qquad (8)$$

Alors ils ont au moins un point commun :

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_i \neq \phi$$

DEMONSTRATION

Il sufit d'appliquer le théorème 4 à la famille des fermés F_A, $A \subset S$, définie par :

$$F_A = F_i \text{ si } A = \{ i \}$$
$$F_A = \phi \text{ sinon.}$$

La condition (8) traduit alors la condition (6) dans ce cas particulier. On conclut donc qu'il existe une structure équilibrée $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ (S) telle que :

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} F_C \neq \phi \tag{9}$$

Il ne reste plus qu'à identifier cette structure $\mathcal{C}$. Pour cela, considérons la structure de coalitions $\mathcal{D}$ formée des $\{ i \}$, pour $i \in S$. Je dis que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. Effectivement, la condition (9) implique que $F_C \neq \phi$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. On sait aussi que $\mathcal{C}$ est équilibrée, donc que pour tout $i \in S$, il existe un C de $\mathcal{C}$, donc de $\mathcal{D}$, tel que $i \in C$: ce ne peut être que $C = \{ i \}$. Finalement, $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, et la condition (9) s'écrit :

$$\bigcap_{C \in \mathcal{D}} F_C = \bigcap_{i=1}^{m} F_i \neq \phi$$

COROLLAIRE 6 (Petit K K M)

Soit $S = \{ 1, \ldots, m \}$. *Pour tout* $i \in S$, *on note* $D_i = S - \{ i \}$. *On recouvre le simplexe* $\Sigma (S)$ *par* m *fermés* $K_1, \ldots, K_m$:

$$\Sigma (S) = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \tag{10}$$

dotés de la propriété suivante :

$$\forall\, i \in S, \quad \Sigma (D_i) \subset K_i \tag{11}$$

Alors ils ont au moins un point commun :

$$\bigcap_{i=1}^{m} K_i \neq \phi$$

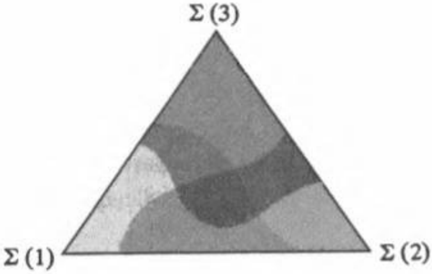


FIGURE II.5

Le petit KKM pour m = 3. Si on recouvre le triangle par trois fermés, chacun contenant un des côtés, ils ont un point commun au moins.

DEMONSTRATION

Il suffit d'appliquer le théorème 4 à la famille des fermés F_A, $A \subset S$, définie par :

$$F_A = \bigcap_{D_i \supset A} K_i$$

en particulier, $F_s = \phi$ et $F_{D_i} = K_i$. La condition (10) exprime que :

$$\bigcup_{A \subset S} F_A \supset \bigcup_{i=1}^{m} F_{D_i} = \bigcup_{i=1}^{m} K_i = \sum_{i=1}^{m} (S)$$

et la condition (11) que :

$$\forall\ B \neq S, \quad \bigcap_{D_i \supset B} K_i \supset \bigcap_{D_i \supset B} \Sigma\ (D_i)$$

Or le membre de gauche est par définition égal à F_B, et le membre de droite est par construction égal à Σ (B). La formule se réduit donc à $F_B \supset \Sigma$ (B) pour toute coalition $B \neq S$, et la condition (6) se trouve donc vérifiée dans tous les cas.

On conclut donc à l'existence d'une structure équilibrée $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ (S) telle que :

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} F_C \neq \phi \qquad (12)$$

Ceci s'écrit encore :

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \ \bigcap_{D_i \supset C} K_i \neq \phi$$

si bien qu'il suffit de vérifier que tous les K_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, figurent effectivement dans cette intersection. Si cela n'était pas vrai, on pourrait trouver un $j \in S$ tel que D_j ne contienne aucun des $C \in \mathcal{C}$. Ceci revient à dire que :

$$\exists\, j \in S : \forall\, C \in \mathcal{C},\ j \in C \tag{13}$$

Or la structure $\mathcal{C}$ est équilibrée ; soient α_C, $C \in \mathcal{C}$, les coefficients associés, tous strictement positifs (définition 1). On a :

$$\forall\, i \in S,\ \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C = 1 \tag{14}$$

avec $\mathcal{C}_i = \left\{ C \in \mathcal{C} \mid C \ni i \right\}$. En prenant $i = j$, on obtient $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}$, donc $\sum_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C = 1$. Ceci implique que $\sum_{C \in \mathcal{D}} \alpha_C \leqslant 1$ pour toute famille $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{D} = \mathcal{C}$. Les équations (14) impliquent donc que $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}$ pour tout $i \in S$, c'est-à-dire que $i \in C$ pour tout $i \in S$ et tout $C \in \mathcal{C}$. En d'autres termes, la structure est réduite à $\left\{ S \right\}$. Ceci contredit la formule (12) puisque $F_S = \phi$. L'hypothèse (13) était donc absurde. Finalement :

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bigcap_{D_i \supset C} K_i = \bigcap_{i=1}^{m} K_i \neq \phi$$

COROLLAIRE 7

Soit $S = \left\{ 1, \ldots, m \right\}$. *On recouvre le simplexe* $\Sigma\,(S)$ *par* m *fermés* $F_1, \ldots, F_m$:

$$\Sigma\,(S) = \bigcup_{i=1}^{m} F_i \tag{15}$$

de façon que F_i *contienne le* $i^{\text{ème}}$ *sommet et ne rencontre pas la face opposée:*

$$\forall\, i \in S,\ \ F_i \ni \Sigma\,(\left\{ i \right\}) \tag{16}$$

$$\forall\, i \in S,\ \ F_i \cap \Sigma\,(D_i) = \phi \tag{17}$$

Alors les F_i *ont un point commun :*

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_i \neq \phi$$

DEMONSTRATION

Si $B \neq S$, $\Sigma(B) = \bigcap_{D_i \supset B} \Sigma(D_i)$. D'après l'équation (17) :

$$\Sigma(B) \cap F_i = \phi \quad \text{si} \quad D_i \supset B$$

Or $D_i \supset B$ si et seulement si $i \notin S$. Des formules (15) et (16) découle alors l'inclusion :

$$\Sigma(B) \subset \bigcup_{i \in B} F_i$$

et la formule (8) se trouve donc démontrée. On est donc ramené au corollaire 5 (Grand K K M).

Le lecteur pourra aisément s'illustrer à soi-même ces divers corollaires dans le cas du triangle ($m = 3$) : on cherche à le recouvrir par trois fermés F_1, F_2, F_3. Si l'on impose à chacun d'eux de contenir un côté distinct, ils ont nécessairement un point commun : c'est le Petit K K M Ce n'est plus vrai si on leur impose de contenir chacun un sommet distinct. Mais cela le redevient si on leur impose en plus de ne pas rencontrer le côté opposé : c'est le Grand K K M (corollaire 7).

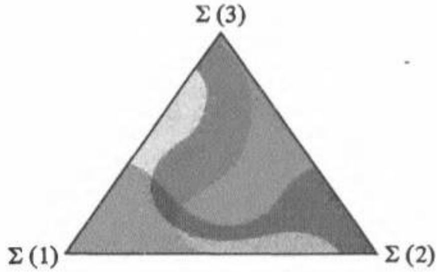


FIGURE II.6

Le corollaire 7 pour m = 3. Si on recouvre le triangle par trois fermés, chacun contenant un sommet mais ne rencontrant pas le côté opposé, ils ont un point commun au moins.

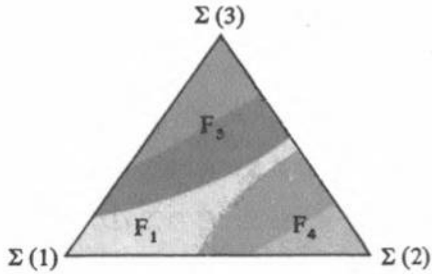


FIGURE II.7

Par contre, on peut fort bien recouvrir un triangle par trois fermés sans point commun, contenant chacun un sommet ; l'un d'eux devra nécessairement rencontrer le côté opposé (cor. 7).

2. Jeux coopératifs

Je vais donner maintenant quelques éléments de la théorie des jeux coopératifs. Il fait malheureusement oublier toutes les considérations qui ont entouré les structures balancées de coalitions, et n'en retenir que le concept brut, exprimé dans la définition 1, et le théorème de Shapley (théorème 4).

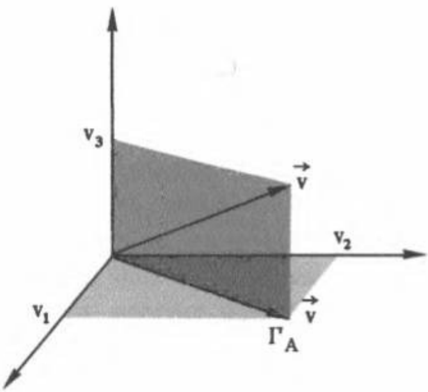


FIGURE II.8

$S = \{1,2,3\}$. On a représenté le cône $\mathbb{R}^S_+$. En prenant $A = \{1,2\}$, on a représenté l'opérateur τ_A.

Contrairement à mon habitude, je commencerai par asséner des définitions. On notera encore S l'ensemble $\{1, \ldots, m\}$. Pour toute partie $A \subset S$, on désignera par $\mathbb{R}^A$ l'ensemble des vecteurs de composantes v_i, $i \in A$. C'est un espace vectoriel de dimension Card A ; on désignera par $\mathbb{R}^A_+$ l'ensemble des vecteurs à composantes positives ($v_i \geqslant 0 \ \forall \ i \in A$) et par $\mathring{\mathbb{R}}^A_+$ l'ensemble des vecteurs à composantes strictement positives ($v_i > 0 \ \forall \ i \in A$). On identifiera $\mathbb{R}^S$ et $\mathbb{R}^m$; à tout vecteur $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ de $\mathbb{R}^S$ est associé un vecteur $\pi_A \vec{v} = (v_i)_{i \in A}$ de $\mathbb{R}^A$, obtenu en ne retenant que les composantes de $\vec{v}$ indexées par A. L'opérateur $\pi_A : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^A$ ainsi défini est linéaire et surjectif ; son noyau :

$$\pi_A^{-1} (\vec{0}) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^S \mid v_i = 0 \ \forall \ i \in A \}$$

peut être identifié au produit $\{\vec{0}\} \times \mathbb{R}^B$ (où $\vec{0}$ est le zéro de $\mathbb{R}^A$ et B le complémentaire de A).

DEFINITION 1

On appelle *jeu coopératif* à *m* personnes la donnée, pour toute partie non vide A de S, d'une partie non vide V (A) de $\mathbb{R}^A$, avec :

$$V(A) - \mathbb{R}^A_{n+} \subset V(A) \tag{1}$$

Suivant une terminologie classique, les éléments de S sont appellés *joueurs*, et les vecteurs de $\mathbb{R}^A$ les A-*imputations*. Pour comprendre toutes ces notions, il faut se représenter S comme une collection de *m* agents, et un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^A$ comme l'attribution d'une utilité v_i à chaque membre *i* de la coalition A. L'agent *i* cherche évidemment à maximiser l'utilité v_i qui lui échoit. Or la règle du jeu autorise les alliances, et les joueurs sont incités à en tirer profit. L'information est supposée parfaite, et le problème pour l'agent *i* est donc de savoir dans quelle alliance entrer. On le verra donc faire le tour des diverses coalitions possibles, et supputer ce qu'elles ont à lui offrir.

C'est justement ce renseignement qui est fourni par V. Chaque coalition A peut garantir à ses membres n'importe quelle imputation de V (A), et celle-là seulement. En d'autres termes, si la coalition A se forme, et si ses membres conviennent *a priori* d'une imputation $\vec{v}$ de V (A), ils peuvent se l'assurer quoique que fassent les autres joueurs. Il y a pour la coalition A une façon de jouer telle qu'à l'issue du jeu, chaque membre *i* de A se retrouve avec une utilité au moins égale à v_i.

Ceci explique la définition 1. Il est bien clair que la coalition A ne se préoccupe que de ses membres. Quant aux autres joueurs, elle ne cherche aucunement à leur garantir quoi que ce soit. N'oublions pas ici que la coalition se définit par une entente mutuelle entre ses membres : quiconque se lie à une coalition par un accord, fût-il à sens unique, rentre par le fait même dans cette coalition. En d'autres termes, la coalition A ne peut se connaître d'obligation qu'envers ses membres, c'est-à-dire que d'une imputation $\vec{v} \in \mathbb{R}^S$ elle ne retient que les composantes v_i pour $i \in A$. On retrouve là l'opérateur π_A : $\mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^A$ que j'ai défini au début. L'inclusion de V (A) dans $\mathbb{R}^A$ signifie donc que seules les composantes correspondant aux $i \in A$ sont à prendre en considération, du point de vue de la coalition A.

Enfin, on convient de dire que la coalition A a réalisé l'imputation $\vec{v} \in V(A)$ si en fait elle a fait mieux pour chacun de ses membres. Ou encore, si la coalition A réalise l'imputation $\vec{u} \in V(A)$, on convient qu'elle réalise du même coup toutes les imputations $\vec{v} \in V(A)$ avec $v_i \leq u_i \ \forall\, i \in A$. C'est en somme le vieux principe « qui peut le plus peut le moins ». Il se traduit par l'inclusion $V(A) - \mathbb{R}^A_{n+} \subset V(A)$ de la formule (1).

En poussant cette interprétation jusqu'au bout, on est conduit à formuler des conditions supplémentaires, que beaucoup d'auteurs incorporent d'ailleurs dans la définition 1. En effet, si A et B sont deux coalitions disjointes, si A peut assurer à ses membres n'importe quelle imputation $(v_i)_{i \in A}$ de V (A), si B peut assurer à ses membres n'importe quelle imputation $(w_i)_{i \in B}$ de V (B) alors très certainement la coalition $A \cup B$ pourra assurer à ses membres l'imputation $(v_i, w_i)_{i \in A \cup B}$. Il lui suffit de laisser A et B agir indépendamment; c'est ce qui ne serait pas possible si $A \cap B \neq \phi$, un même agent $i \in A \cap B$ recevant alors des consignes contradictoires. C'est la propriété de *suradditivité*, qui est satisfaite dans tous les cas pratiques, et que l'on exprimera par la formule :

$$A \cap B = \phi,\ \vec{v} \in V(A),\ \vec{w} \in V(B) \Rightarrow (\vec{v}, \vec{w}) \in V(A \cup B) \qquad (2)$$

ou, de manière équivalente, par l'inclusion :

$$A \cap B = \phi \Rightarrow \check{V}(A) \times V(B) \subset V(A \cup B). \qquad (3)$$

En général cette inclusion sera stricte, ce qui signifie que les possibilités offertes aux coalitions A et B s'accroissent si elles acceptent de coordonner leurs efforts.

Un cas particulier important est celui des jeux coopératifs à paiements latéraux. Ils se situent dans un cadre analogue à celui du paragraphe I.5, où nous avons introduit des coefficients de transfert entre les utilités d'agents différents. On admettra ici des coefficients de transfert égaux à un ; en d'autres termes, les gains sont évalués d'après une unité commune à tous les joueurs, et chacun a le droit de transférer une partie de son gain sur un partenaire. On peut donc acheter le concours de joueurs placés dans une position clef en leur promettant une partie du gain supplémentaire réalisé grâce à leur collaboration. Une fois conclus tous ces accords, les diverses coalitions actives encaisseront les gains de leurs membres, et les leur redistribueront suivant les conventions préalables.

Mathématiquement, si la coalition A peut assurer à ses membres l'imputation $\vec{v} \in \mathbb{R}^A$, elle pourra leur assurer n'importe quelle imputation $\vec{u} \in \mathbb{R}^A$ vérifiant $\Sigma\ u_i = \Sigma\ v_i$. Il suffit de répartir différemment le gain total qui reste inchangé. On en conclut que V (A) est nécessairement de la forme :

$$V(A) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}_m^A \mid \Sigma\ v_i \leqslant v(A) \right\} \tag{4}$$

où v (A) est le gain total maximum que la coalition A puisse encaisser contre toute défense. C'est un nombre, et non plus un ensemble. La propriété de suradditivité prend alors une forme plus simple. D'après la formule (2), $\Sigma\ v_i \leqslant v(A)$ et $\Sigma\ w_i \leqslant v(B)$ implique que $\Sigma\ v_i + \Sigma\ w_i \leqslant v(A \cup B)$, pourvu que $A \cap B = \phi$. Ceci équivaut à l'inégalité :

$$A \cap B = \phi \Rightarrow v(A) + v(B) \leqslant v(A \cup B) \tag{5}$$

Imaginons par exemple un milliardaire nanti de trois neveux, et léguant sa fortune à celui d'entre eux qu'ils désigneront à la majorité. On aura $v(A) = 0$ pour Card $A = 1$ et $v(A) = f$ pour Card $A \geqslant 2$. Il est probable que l'on verra deux des neveux s'entendre pour voter sur un même nom, quitte pour l'héritier à reverser la moitié du magot à son partenaire. Mais la personne évincée ne se laissera peut-être pas faire aussi facilement, et tentera de débaucher un des deux complices en lui proposant une part plus importante de l'héritage. En y réfléchissant un peu, on conçoit que même un exemple aussi simple est riche de possibilités. La situation est encore bien plus inextricable dans les jeux de type général (sans paiement latéraux).

En fait, on sait fort peu de choses concernant les jeux coopératifs à *m* personnes. On ne sait pas prédire le déroulement du jeu ; la vie et la mort des coalitions, en particulier, reste très mystérieuse. Ce qu'on sait concerne surtout des procédures d'arbitrage qui, dans une certaine mesure, dispensent de jouer. Celle que nous allons étudier, la plus fertile en applications économiques nous conduit au concept du noyau. Pour l'exposer, nous revenons au cadre général de la définition 1.

Supposons qu'un arbitre rassemble les *m* joueurs, et propose une imputation

$\vec{v} \in \mathbb{R}^S_n$, soit une utilité v_i à l'agent *i*. Pour que cette proposition soit acceptée, il faut d'abord qu'elle soit réaliste, c'est-à-dire que :

$$\vec{v} \in V(S) \tag{6}$$

Ainsi, les *m* joueurs agissant de concert, sont assurés de pouvoir réaliser l'imputation $\vec{v}$. Mais pour obtenir cet accord général, il faut que chacun y trouve son compte. Il faut donc proposer à l'agent *i* au moins autant que ce qu'il peut s'assurer en agissant tout seul. La formule (1) montre que $V(\{i\})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, de la forme :

$$V(\{i\}) = [-\infty, v(\{i\})] \tag{7}$$

où $v(\{i\})$ est l'utilité maximum que l'agent *i* peut se garantir indépendamment des autres joueurs. Pour que l'arbitrage proposé soit acceptable pour les *m* individus, il faut donc que :

$$\forall\ i \in S,\ v_i \geqslant v(\{i\}) \tag{8}$$

Mais il n'y a pas que les individus dans les jeux coopératifs : il y a toutes les coalitions. Les joueurs passent constamment en revue toutes les alliances possibles, et si les membres de la coalition A, en faisant leurs comptes, s'aperçoivent qu'en agissant ensemble, et quoi que fassent les autres, ils peuvent se débrouiller pour faire strictement mieux que ce qu'on leur propose, ils feront sécession et refuseront l'arbitrage. On dira donc qu'une coalition A *bloque* l'imputation $\vec{v} \in \mathbb{R}^S$ s'il existe $\vec{u} \in V(A)$ avec $v_i < u_i$ pour tout $i \in A$.

DEFINITION 2

Le *noyau* du jeu est l'ensemble des imputations de V (S) qui ne sont bloquées par aucune coalition.

Le noyau du jeu représente donc l'ensemble des arbitrages acceptables. Il nous sera très utile dans la suite d'en avoir une figuration géométrique dans l'espace $\mathbb{R}^m$. Cet espace contient V (S), dont le noyau est un sous-ensemble, noté $\mathfrak{N}$. Introduisons l'ensemble B (A) des imputations $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ qui sont bloquées par la coalition $A \subset S$:

$$\begin{aligned} B(A) &= \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{u} \in V(A) : \forall\ i \in A,\ v_i < u_i \right\} \\ &= \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^m \mid \pi_A \vec{v} \in V(A) - \mathring{\mathbb{R}}^A_+ \right\} \\ &= \left\{ \pi_A^{-1} (V(A) - \mathring{\mathbb{R}}^A_+) \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

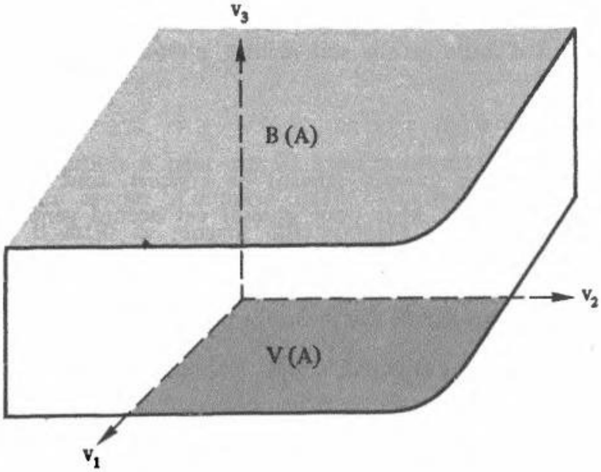


FIGURE II.9

S = $\{1,2,3\}$. On a représenté l'ensemble V (A), pour A = $\{1,2\}$; (dans le plan horizontal ; grisé le plus foncé). L'ensemble B (A) bloqué par A est l'intérieur du cylindre ayant V (A) pour bas et des génératrices verticales (volume grisé le plus clair).

Géométriquement, B (A) est un cylindre de $\mathbb{R}^m$, aux génératrices parallèles à $\pi_{A}^{-1}(\vec{0})$, c'est-à-dire à $\mathbb{R}^{S\setminus A}$. En d'autres termes, si $\vec{v} \in$ B (A), alors $\vec{v} + \vec{w} \in$ B (A) pourvu que $w_i = 0 \ \forall\ i \in A$. Dire qu'une imputation $\vec{v} \in \mathbb{R}^S$ n'est bloquée par aucune coalition signifie que le vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ n'appartient à aucun des B (A), A $\subset$ S. La définition 1 définit donc le noyau $\mathfrak{N}$ comme l'ensemble :

$$\mathfrak{N} = V(S) \cap (\bigcap_{A \subseteq S} \complement\, B(A)) \qquad (10)$$

Dans cette formule interviennent les B ($\{i\}$), pour i $\in$ S. Ce sont en fait les demi-espaces de $\mathbb{R}^m$ formés des points dont la $i^{\text{ème}}$ composante est strictement inférieure à v ($\{i\}$) (formule (7)). La formule (10) implique donc la formule (9). Mais B (S) intervient également ; ceci implique par exemple qu'aucun point de $\mathfrak{N}$ ne peut être intérieur à V (S). Nous reviendrons sur ces considérations dans la suite. Pour l'instant, voyons un peu ce que donne la définition 2 dans le cas particulier des jeux à paiements latéraux.

PROPOSITION 3

Dans un jeu à paiements latéraux, le noyau est l'ensemble des imputations $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ qui vérifient :

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = v(S) \tag{11}$$

$$\forall A \subset S \quad \sum_{i \in A} v_i \geqslant v(A) \tag{12}$$

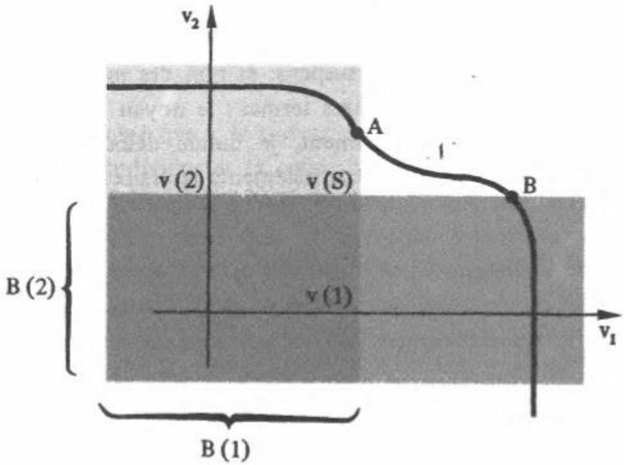


FIGURE II.10

On a représenté le noyau dans le cas très simple où il n'y a que deux joueurs (m = 2). L'ensemble B (S) n'est autre que l'intérieur de V (S).

DEMONSTRATION

D'après la formule (4), l'appartenance $\vec{v} \in \mathbf{V}(S)$ se traduit par l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \leqslant v(S)$$

D'après la même formule, dire que $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ est bloquée par la coalition A se traduit par l'inégalité :

$$v(A) - \sum_{i \in A} v_i > 0$$

En effet, en appelant ϵ ce nombre strictement positif et a le nombre d'éléments de A, on constate que l'imputation $\vec{u} \in \mathbb{R}^A$, définie par $u_i = v_i + \epsilon/a$, vérifie $u_i \geqslant v_i$ pour tout $i \in A$, et appartient à V (A). D'où la formule (12), et en particulier l'inégalité obtenue en y prenant A = S. Comme l'inégalité inverse a été démontrée par ailleurs, l'égalité (11) en découle.

Le noyau du jeu paraît résoudre de manière satisfaisante le problème de l'arbitrage : une fois proposée une allocation du noyau, personne, individu ou coalition, n'est incité à s'y opposer sous peine d'être abandonné à ses propres forces, et de faire moins bien que ce qui était offert. Malheureusement, il reste une question en suspens, et non des moindres : existe-t-il vraiment de tels arbitrages ? En d'autres termes : le noyau est-il non vide ? Pour voir que la question se pose vraiment, je donne deux exemples simples, tous deux dans le cadre des jeux avec paiements latéraux.

Jeu de l'héritage. C'est le jeu à trois personnes que nous avons décrit tout à l'heure. Son noyau est l'ensemble des imputations (v_1, v_2, v_3) vérifiant (11) et (12), qui deviennent ici :

$$v_1 + v_2 + v_3 = f \tag{13}$$

$$v_1 + v_2 \geqslant f, \quad v_1 + v_3 \geqslant f, \quad v_2 + v_3 \geqslant f \tag{14}$$

$$v_1 \geqslant 0, \quad v_2 \geqslant 0, \quad v_3 \geqslant 0 \tag{15}$$

On vérifie aisément que ces inégalités sont incompatibles : l'addition membre à membre des inégalités (14) donne $2(v_1 + v_2 + v_3) \geqslant 3f$, contrairement à l'équation (13). Toute imputation est donc bloquée par une coalition au moins. L'imputation (f/2, f/2, 0), par exemple, que j'avais proposée, est bloquée par la coalition $\{2, 3\}$, qui peut réaliser (0, 3f/4, f/4).

Jeu de la pollution. Chacun des *m* joueurs possède un jardin propre et une poubelle pleine. Le jeu consiste à vider sa poubelle dans le jardin de quelqu'un. Si *p* poubelles ont été déversées dans le jardin du joueur *i*, le gain de celui-ci est $-$ p.

Là encore, on montre aisément que le noyau est vide. On a $v(S) = -m$ (nombre total de poubelles) et, si on note A_i, la coalition $S \setminus \{i\}$, on a $v(A_i) = -1$ (le jardin de l'agent *i* sert de dépotoir à la coalition A_i, et le malheureux ne peut se venger qu'une fois). En écrivant l'inégalité (12) pour A_i, on obtient :

$$\forall\, i \in S, \ \sum_{j \neq i} v_j \geqslant -1$$

On a là *m* inégalités que l'on ajoute membre à membre, ce qui donne :

$$(m-1) \sum_{i=1}^{m} v_i \geqslant -m$$

En remplaçant $\Sigma\, v_i$ par sa valeur $v\,(S) = -m$, on obtient l'inégalité $(m-1) \leqslant 1$ soit $m \leqslant 2$. Si $m \geqslant 2$, on tient une contradiction, et le noyau est vide.

Ces deux exemples laissent penser que si le noyau est vide, c'est que les coalitions, intermédiaires entre les individus et la collectivité, ont trop de pouvoir. Dans le jeu de l'héritage, par exemple, il suffit de décider que les coalitions de deux joueurs n'ont droit qu'aux deux tiers de la fortune (remplacer f par 2f/3 dans les formules (14)) pour que le cœur contienne au moins l'imputation (f/3, f/3, f/3). Il s'agit donc de traduire mathématiquement cette idée que les coalitions intermédiaires ne doivent pas être trop puissantes devant S.

Déjà, la propriété de suradditivité traduit partiellement cette idée. En effet, si l'on a une structure naturelle disjointe, c'est-à-dire une famille $\mathcal{C}$ de coalitions C deux à deux disjointes et recouvrant S, on déduit aisément de la formule (2) que, pour toute imputation $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, on a :

$$[\forall\, C \in \mathcal{C},\ \pi_C\, \vec{v} \in V\,(C)] \Rightarrow \vec{v} \in V\,(S) \tag{16}$$

En d'autres termes, si une imputation $\vec{v}$ est réalisable par toutes les coalitions C de $\mathcal{C}$, chacune en ce qui la concerne, alors elle est réalisable par la société S toute entière. C'est bien une façon de dire que les coalitions intermédiaires ne sont pas trop puissantes. Malheureusement, elle est insuffisante : le jeu de l'héritage et le jeu des poubelles sont suradditifs, mais leur cœur est vide. Il faut donc renforcer l'hypothèse de suradditivité : une manière naturelle de faire est d'étendre la formule (16) aux structures équilibrées.

DEFINITION 4

Le jeu est dit *équilibré* si, pour toute structure équilibrée $\mathcal{C}$, et toute imputation $v \in \mathbb{R}^m$, on a :

$$[\forall\ C \in \mathcal{C},\ \pi_C\ \vec{v} \in V\ (C)] \Rightarrow \vec{v} \in V\ (S) \tag{17}$$

La formule (17) peut aussi s'écrire comme une inclusion dans $\mathbb{R}^m$:

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \pi_C^{-1}\ (V\ (C)) \subset V\ (S) \tag{18}$$

Cette propriété suffit à assurer la non-vacuité du noyau. Bondavera [1962, 1963] dans le cas des jeux à paiements latéraux, puis Scarf [1967] dans le cas général, ont démontré le résultat suivant :

THEOREME 5

Le noyau est non vide pourvu que :

(a) *le jeu soit équilibré et les $V\ (A)$ fermés $\forall\ A \subset S$,*

(b) $W(A) = \left\{ \vec{v} \in V(A) \mid v_i \geqslant v(\{i\})\ \forall\ i \in A \right\}$ *soit borné et non vide* $\forall\ A \subset S$.

Rappelons que $v\ (\{i\})$ est l'utilité maximum que le joueur *i* peut se garantir par lui-même (formule (7)). Comme les W (A) sont en nombre fini, dire qu'ils sont bornés implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall\ A \subset S,\ \ \forall\ \vec{w} \in W\ (A),\ \ \forall\ i \in A,\ \ w_i - v\ (\{i\}) \leqslant c \tag{19}$$

La démonstration que je vais donner est dûe à Shapley [1973]. Elle consiste à se ramener au théorème 1.4 en trois étapes successives.

Etape 1. Je considère dans $\mathbb{R}^m$ l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites parallèles au vecteur $\vec{1} = (1, \ldots, 1)$ et orientées dans le même sens. Elles sont toutes orthogonales à l'hyperplan H d'équation $v_1 + \ldots + v_m = \sum_{i=1}^{m} v\ (\{i\}) - mc$ où c est la constante de la formule (19). Chaque droite $D \in \mathcal{D}$ coupe H en un point $\vec{v}$ et un seul ; la donnée de ce point la caractérise complètement. On a :

$$D = \left\{ \vec{v} + t\ \vec{1} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \tag{20}$$

LEMME 1

Pour tout $\vec{v} \in H$ et tout $A \subset S$, il existe un unique nombre $\tau_A\ (\vec{v})$ tel que :

$$D \cap B\ (A) = \left\{ \vec{v} + t\ \vec{1} \mid t < \tau_A\ (\vec{v}). \right\}$$

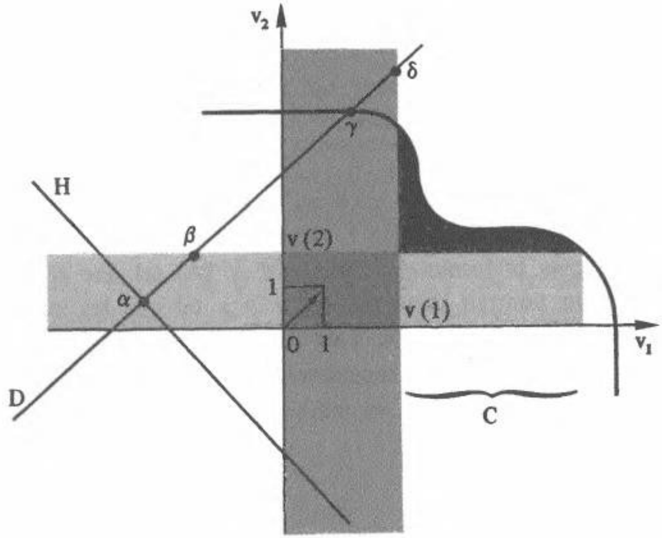


FIGURE II.11

Toujours le cas simple $S = \{1,2\}$. On a noirci W (S). Les quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, représentent respectivement $\vec{v}$, $\vec{v} + \tau_2(\vec{v})$, $\vec{v} + \tau_S(\vec{v})$, $\vec{v} + \tau_1(\vec{v})$.

DEMONSTRATION

Introduisons l'ensemble :

$$I_A(\vec{v}) = \{ t \mid \vec{v} + t\,\vec{1} \in B(A) \}$$

Soit $t \in I_A(\vec{v})$. D'après la formule (9), on peut trouver $\vec{u} \in V(A)$ tel que $v_i + t < u_i$ pour tout i de A. Si $s < t$, on aura a fortiori $v_i + s < u_i$ pour tout i de A. Donc

$$[t \in I_A(\vec{v}) \text{ et } s < t] \Rightarrow s \in I_A(\vec{v}),$$

qui se trouve donc être soit vide, soit $\mathbb{R}$ tout entier, soit un intervalle de la forme $]-\infty, \tau)$, ouvert ou fermé.

Prenons dans W (A) un point quelconque w, et choisissons $\underline{t} < \min\limits_{i \in A} (w_i - v_i)$. Alors $v_i + \underline{t} < w_i$ pour tout $i \in A$, et $\vec{v} + \underline{t}\,\vec{1} \in V(A)$ d'après la formule (1). Donc $\underline{t} \in I_A(\vec{v})$. D'autre part, si l'on choisit un $\bar{t} > \max\limits_{i \in A} (c - v_i)$, on aura

$v_i + \bar{t} > c$ pour tout $i \in A$, et $\vec{v} + \bar{t}\ \vec{1} \notin W(A)$ d'après la formule (17). Si en outre $\bar{t} > \max_{i\in A} (v(\{i\}) - v_i)$ (un tel choix est toujours possible) on en déduit que $\vec{v} + \bar{t}\ \vec{1} \notin B(A)$. Donc $\bar{t} \notin I_A(\vec{v})$. L'intervalle $I_A(\vec{v})$ ne saurait donc être vide, ni coïncider avec $\mathbb{R}$.

Ce ne peut pas être non plus un intervalle fermé, de la forme $[-\infty, \tau]$. Si en effet la borne supérieure τ appartenait à $I_A(\vec{v})$, on pourrait trouver, toujours d'après la formule (9), un $\vec{u} \in V(A)$ tel que $v_i + \tau < u_i$ pour tout $i \in A$. On pourrait donc trouver $\sigma > \tau$ tel que les inégalités $v_i + \sigma < u_i$ subsistent pour tout $i \in A$. Cela signifierait que $\sigma \in I_A(\vec{v})$, contrairement à la définition de la borne supérieure. Finalement, $I_A(\vec{v})$ est nécessairement un intervalle ouvert de la forme indiquée.

LEMME 2

La fonction $\tau_A : H \to \mathbb{R}$ est continue.

DEMONSTRATION

Soit $\vec{v}_n$ une suite de points de H convergeant vers $\vec{v}$. Posons $\tau_A(\vec{v}_n) = \tau_n$ et $\tau_A(\vec{v}) = \tau$. Par définition de τ_A, on a :

$$\forall\, t < \tau,\ \vec{v} + t\ \vec{1} \in B(A)$$

ce qui donne, en ajoutant $\mathring{\mathbb{R}}_+^A$ aux deux membres :

$$\vec{v} + \tau\ \vec{1} - \mathring{\mathbb{R}}_+^A \subset B(A)$$

Notons $t_n = \sup \{ t \mid \vec{v}_n + t\ \vec{1} \in \vec{v} + \tau\ \vec{1} - \mathbb{R}^A_{n+} \}$. De l'inclusion précédente on déduit immédiatement que $t_n \leqslant \tau_n$. Par ailleurs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} t_n &= \sup \{ t \mid t\ \vec{1} + \vec{v}_n - \vec{v} - \tau\ \vec{1} \in - \mathring{\mathbb{R}}_+^A \} \\ &= \sup \{ t \mid t + v_{in} - v_i - \tau < 0 \quad \forall\, i \in A \} \\ &= \inf_{i\in A} \{ \tau + v_i - v_{in} \} \end{aligned}$$

ce qui montre que t_n tend vers τ. De même manière, je dis que :

$$(\vec{v} + \tau\ \vec{1} + \mathbb{R}_+^A) \cap B(A) = \phi \tag{21}$$

Si en effet cette intersection contenait un point $\vec{w}$, on pourrait trouver un $\vec{u} \in V(A)$ tel que :

$$\forall\, i \in A, u_i > w_i \geqslant v_i + \tau$$

En particulier, les inégalités $u_i > v_i + \sigma$ subsisteraient pour tous les σ assez voisins de τ, contrairement à la définition de celui-ci comme borne supérieure.

Notons $s_n = \min \left\{ t \mid v_n + t\, \vec{\mathbb{1}} \in \vec{v} + \tau\, \vec{\mathbb{1}} + \mathbb{R}_+^A \right\}$. De la formule (21) on déduit immédiatement que $s_n \geqslant \tau_n$. Par ailleurs, on peut écrire comme ci-dessus :

$$s_n = \max_{i \in A} \left\{ \tau + v_i - v_{in} \right\}$$

ce qui montre que s_n tend vers τ.
On a donc démontré l'encadrement $t_n \leqslant \tau_n \leqslant s_n$ où les deux extrêmes tendent vers τ. Ceci prouve que τ_n tend vers τ, et donc que τ_A est continue.

Pour chaque coalition $A \neq \phi$, je pose :

$$F_A = \left\{ \vec{v} \in H \mid \tau_A(\vec{v}) = \max_{C \subset S} \tau_C(\vec{v}) \right\} \tag{22}$$

On peut interpréter cette définition à l'aide de la formule (20) : un point $\vec{v}$ de H appartient à F_A si l'intersection $D \cap B(A)$ recouvre tous les $D \cap B(C)$. En d'autres termes, c'est dans B (A) que la droite D reste le plus longtemps. En tous cas, de la définition (22) et du lemme 2 il ressort immédiatement que les F_A sont des fermés. D'après le lemme 1, ils recouvrent H. Ils ne sont pas nécessairement disjoints, et certains d'entre eux peuvent être vides.
Au terme de cette première étape, nous avons construit un recouvrement de H par une famille de fermés F_A, $A \subset S$. Dans une deuxième étape, nous allons nous ramener à un recouvrement d'un simplexe contenu dans H.

Etape 2. Considérons le simplexe :

$$\Sigma(S) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^{m} v_i = mc \right\}$$

En lui faisant subir une symétrie par rapport à l'origine, puis une translation de vecteur $(v(\{i\}))_{i \in S}$, on obtient un simplexe égal :

$$\Sigma'(S) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, i \in S,\ v_i \leqslant v(\{i\}) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} (v_i - v(\{i\})) = -\,mc \end{array} \right\}$$

Il est clair que $\Sigma'(S)$ est contenu dans H. En posant $F'_A = F_A \cap \Sigma'(S)$ pour toute coalition $A \subset S$, on obtient une famille de fermés recouvrant $\Sigma'(S)$. Montrons qu'elle satisfait l'hypothèse (6) du théorème 1.4, c'est-à-dire que :

$$\forall\, C \subset S,\ \Sigma'(C) \subset \bigcup_{A \subset S} F'_A \tag{23}$$

On sait déjà que :

$$\Sigma'(C) \subset \Sigma'(S) \subset \bigcup_{A \subset C} F'_A$$

et il suffira donc de montrer que pour tout $C \neq S$:

$$A \not\subset C \Rightarrow F'_A \cap \Sigma'(C) = \phi \tag{24}$$

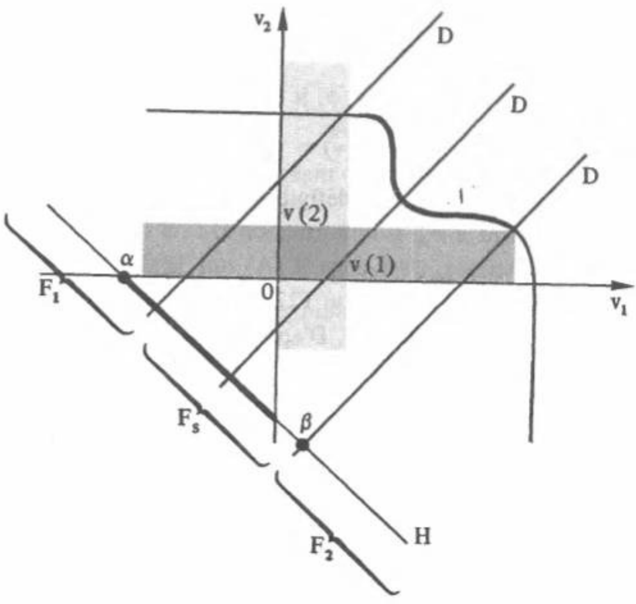


FIGURE II.12

Toujours le cas m = 2. On a représenté le simplexe $\Sigma'(S)$ (segment $\alpha\,\beta$), et les fermés F_1, F_2, F_3 de l'hyperplan H, ainsi que les deux positions limites de la droite D. On remarquera que, dans ce cas, il est patent que F_s est non vide, et donc que $\mathfrak{N}$ ne l'est pas non plus.

Prenons donc un point $\vec{v}$ dans $F'_A \cap \Sigma'(C)$ et montrons qu'on aboutit à une contradiction. Dire que $\vec{v} \in \Sigma'(C)$ signifie que :

$$\begin{aligned} &v_i - v(\{i\}) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in C \\ &v_i - v(\{i\}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \notin C \\ &\sum_{i \in C} (v_i - v(\{i\})) = -mc \end{aligned} \tag{25}$$

Comme C a strictement moins de *m* éléments, on en déduit qu'il existe un $j \in C$ tel que :

$$v_j - v(\{j\}) < -c.$$

Considérons alors la coalition $J = \{j\}$. Par définition des τ_A :

$$\tau_J(\vec{v}) = (v(\{j\}) - v_j) > c.$$

Dire que $v \in F'_A$ implique, d'après la formule (22), que pour tout $i \in S$:

$$\tau_A(\vec{v}) \geqslant \tau_I(\vec{v})$$

en notant I la coalition $\{i\}$. D'où deux conséquences. En prenant $i = j$ et en utilisant l'inégalité précédente :

$$\tau_A(\vec{v}) > c \tag{26}$$

puis en écrivant que $\vec{v} + \tau_A(\vec{v})\vec{1} \notin B(\{i\})$:

$$\forall\, i \in A, \quad v_i + \tau_A(\vec{v}) \geqslant v(\{i\}) :$$

D'après un lemme dont je remets la démonstration à un peu plus tard, j'ai l'inégalité :

$$\forall\, i \in A, \; v_i + \tau_A(\vec{v}) - v(\{i\}) \leqslant c. \tag{27}$$

En comparant (26) et (27), on obtient :

$$\forall\, i \in A, \; v_i - v(\{i\}) < 0. \tag{28}$$

Ces inégalités strictes sont en contradiction avec les équations (25) chaque fois que A n'est pas contenu dans C. La formule (24) est donc établie, et donc l'hypothèse (23). La démonstration a fait appel au lemme suivant :

LEMME 3

On a l'implication :

$$[\forall\ i \in A,\ v_i + \tau_A(\vec{v}) - v(\{i\}) \geqslant 0] \tag{29}$$

$$\Rightarrow [\forall\ i \in A,\ v_i + \tau_A(\vec{v}) - v(\{i\}) \leqslant c] \tag{30}$$

DEMONSTRATION

Posons $\vec{v}_A = \pi_A\ \vec{v}$ et $\vec{1}_A = \pi_A\ \vec{1}$. Je vais montrer que la condition (29) implique que $\vec{v}_A + \tau_A(\vec{v})\ \vec{1}_A \in W(A)$. L'inégalité (19) fera le reste.

Soit $t_n < \tau_A(\vec{v})$ une suite de nombres convergeant vers $\tau_A(\vec{v})$. On a $\vec{v} + t_n\ \vec{1} \in B(A)$, et donc

$$\vec{v}_A + t_n\ \vec{1}_A \in V(A) - \mathring{\mathbb{R}}^A_+ \subset V(A).$$

Puisque V (A) est fermé, on obtient $\vec{v}_A + \tau_A(v)\ \vec{1}_A \in V(A)$ par passage à la limite. Les inégalités (29) permettent de préciser que :

$$\vec{v}_A + \tau_A(\vec{v})\ \vec{1}_A \in W(A),$$

et le tour est joué.

Il ne reste plus qu'à conclure.

Etape 3. D'après la formule (23), on est dans les conditions d'application du théorème 1.4. On peut donc trouver une structure équilibrée $\mathcal{C}$ de coalitions et une imputation $\vec{v} \in H$ telles que :

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} F'_C \ni \vec{v}.$$

D'après la définition des F'_C, ceci signifie que :

$$\forall\ C \in \mathcal{C},\ \ \forall\ A \subset S,\ \ \tau = \tau_C(\vec{v}) \geqslant \tau_A(\vec{v}).$$

En particulier, $\vec{v}_C + \tau\ \vec{1}_C$ appartiendra à V (C) pour tous les C de $\mathcal{C}$, mais n'appartiendra à aucun des B (A), quel que soit $A \subset S$ (définition de τ_A). Il ne reste plus qu'à se servir de l'hypothèse que le jeu est équilibré (formule (17)) :

$$\vec{v} + \tau \vec{1} \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \pi^{-1} (V(C)) \subset V(S)$$

$$\vec{v} + \tau \vec{1} \notin \bigcup_{A \in S} B(A)$$

Le résultat est donc établi (formule 10)) : le membre de gauche appartient au noyau.

Pour mieux faire comprendre le rôle des différentes étapes, il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer que s'il existe $\vec{v} \in H$ tel que $\tau_S(\vec{v}) = \max \tau_A(\vec{v})$, c'est-à-dire si F_S est non vide, alors $\vec{v} + \tau_S(\vec{v})$ appartient nécessairement au noyau puisqu'elle appartient à V (S) mais non aux B (A), $A \subset S$. Malheureusement, F_S peut être vide, d'où la nécessité de faire appel au théorème 1.4 et à l'hypothèse d'équilibre.

3. Noyau d'une économie

Le moment est maintenant venu de retrouver l'univers économique décrit au Chapitre I, où *m* agents caractérisés par leurs relations de préférence $\succsim_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ont à se partager des ressources en quantité totale $\vec{\Omega} \in \mathbb{R}^l$. Pour la commodité de l'exposé, on supposera que les préordres $\succsim_i$ peuvent être représentés par des fonctions d'utilité individuelles u_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Il faut pour cela qu'ils soient totaux, et il suffit qu'ils soient continus.

Nous allons ajouter à ce schéma, longuement étudié au Chapitre I, deux hypothèses supplémentaires, qui vont complètement transformer la situation :

- (H 1) la fonction d'utilité u_i de l'individu *i* ne dépend que de son panier de biens $\vec{x}^i \in \mathbb{R}^l$.
- (H 2) les ressources totales $\vec{\Omega}$ sont initialement réparties entre les individus.

Rappelons-nous que l'utilité de l'agent *i*, telle que nous l'avons définie au paragraphe I.4 est une fonction u_i de $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^l, \ldots, \vec{x}^m)$. C'est-à-dire que l'agent *i* tient compte dans ses préférences, non seulement de son propre panier de biens $\vec{x}^1$, mais de ceux des autres. Il ne compare pas directement des paniers de biens $\vec{x}^i$ et $\vec{y}^i$, mais des allocations $X = (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ et $Y = (y^1, \ldots, y^m)$. Ceci permet de tenir compte de certaines interactions individuelles, que nous avons analysées au paragraphe I.2. L'hypothèse (H 1) signifie justement que ces interactions n'ont pas lieu. Les consommateurs ignorent, volontairement ou non, le lot d'autrui : seul leur importe ce qu'ils reçoivent en propre. C'est la modélisation de l'égoïsme ; elle se traduit mathématiquement par le fait qu'on écrit :

$$u_i(\vec{x}^i) \text{ au lieu de } u_i(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$$

$$\vec{x}^i \succsim_i \vec{y}^i \text{ au lieu de } (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \succsim_i (\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$$

Cet égoïsme des agents rend le problème du partage particulièrement difficile. Si, par exemple, on suppose toutes les préférences monotones, chacun des individus prétendra s'attribuer la quantité totale $\vec{\Omega}$ à répartir, sans en laisser aux autres la moindre miette. Ces points de vue sont évidemment inconciliables, et dans ces conditions il n'est pas étonnant que le Chapitre I se soit terminé sur un constat d'échec.

C'est l'hypothèse (H 2) qui va sauver la situation. Elle introduit un changement radical : la propriété privée des ressources totales $\vec{\Omega}$. Jusqu'à présent elles n'étaient à personne, et il s'agissait de se les répartir. Maintenant on suppose qu'au départ l'agent *i* se trouve en possession d'un panier de biens $\vec{\omega}^i \in \mathbb{R}^l_+$. Les ressources totales de l'économie seront obtenues en agrégeant toutes ces quantités, ce qui se traduit par l'équation :

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \ldots + \vec{\omega}^m \qquad (1)$$

Mais il n'est pas question de disposer de la portion $\vec{\omega}^i$ sans l'accord de l'agent *i*. Celui-ci a entre les mains des biens qu'on ne pourra lui retirer qu'en lui proposant mieux. Le problème se pose dorénavant moins en termes de partage qu'en termes d'échanges. On part d'une distribution initiale des biens, fruit sans doute d'un partage antérieur, ou simple héritage du passé, et on cherche à l'améliorer. Les ressources totales (1) étant constantes, cela ne peut provenir que d'échanges entre individus. et c'est un fait d'expérience qu'un échange peut être bénéfique à tous les partenaires.

J'appellerai *économie de propriété privée* une économie vérifiant les propriétés (H 1) et (H 2). Il faut se l'imaginer comme un gigantesque marché forain, où les agents arrivent tôt le matin avec leurs paniers $\vec{\omega}_i$ et repartent à midi avec des paniers $\vec{x}^i$. On voit combien la situation diffère de celle du chapitre précédent, où les agents arrivaient avec des paniers vides et trouvaient un grand tas de victuailles $\vec{\Omega}$ sur la place du marché. Dans ce cas, il n'y a pas de règle de partage autre que l'optimalité au sens de Pareto, qui consiste à ne rien laisser. Par contre, dans le cas présent, la propriété privée des ressources initiales permet d'introduire des règles supplémentaires, et de déterminer beaucoup plus précisément des allocations $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ satisfaisantes. C'est que cette fois nous disposons d'une base de comparaison, à savoir l'allocation initiales $(\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n)$. Voyons cela.

Le problème posé à la société S est inchangé : répartir au mieux les ressources totales Ω. Imaginons donc un coordinateur quelconque qui élabore un projet de redistribution : une allocation réalisable $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est présentée aux suffrages du public. Jusqu'à maintenant, seule était appelée à se prononcer la collectivité dans son ensemble, qui disposait d'un veto pourvu qu'il soit unanime. Les allocations réalisables qui franchissent ce cap sont par définition les optima de Pareto. Mais à présent, les individus, propriétaires des ressources initiales, ont aussi leur mot à dire. Une redistribution $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ aura beau être optimale au sens de Pareto, si l'agent *i* préfère la répartition initiale $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$, c'est-à-dire si $\vec{\omega}^i \succsim_i \vec{x}^i$, il refusera d'y prêter la main, ce qui la bloque effectivement : l'unanimité nécessaire est rompue, et si les autres membres décident de passer outre, ils devront se passer des ressources $\vec{\omega}^i$ de l'agent *i*, qui ont chance de leur manquer cruellement. A côté du critère de « rationalité collective » que constitue la règle de l'unanimité, joueront *m* critères de « rationalité individuelle » symbolisés par les conditions :

$$\forall\ i \in S, \vec{x}^i \succsim_i \vec{\omega}^i \tag{2}$$

Et ce n'est pas tout ! Car les coalitions aussi ont maintenant un droit de veto. En mettant leurs ressources initiales en commun, les membres de la coalition $A \subset S$ peuvent réaliser n'importe quels paniers de biens y^i, $i \in A$, pourvu que $\sum_{i \in A} y^i = \sum_{i \in A} \omega^i$. Si l'une de ces redistributions vérifie $y^i \succ_i x^i$ pour tout $i \in A$, alors la coalition A bloquera l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$. Toute tentative de réalisation de celle-ci est vouée à l'échec, car la coalition A peut entraîner tous ses membres dans la sécession, en leur promettant strictement mieux que ce que le coordinateur leur propose. Poue être acceptable, une allocation réalisable $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ doit donc satisfaire à des critères de « rationalité intermédiaire », donnés par :

$$\forall\ A \subset S, \quad \sum_{i \in A} \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \vec{\omega}^i \Rightarrow \exists\ i \in A : \vec{x}^i \succsim_i \vec{y}^i \tag{3}$$

Notons qu'il y a $2^m - 1$ conditions de type (3), en excluant le cas $A = \phi$. Si l'on prend $A = S$, on trouve la définition de l'optimalité faible de Pareto. Si l'on prend $A = \{i\}$, on retrouve les conditions (2). Dans toute cette analyse, on voit clairement le rôle de l'hypothèse (H 2) ; pour être plus caché, le rôle de l'hypothèse (H 1) n'est pas moins réel. Car le concept de blocage repose sur une menace de sécession, c'est-à-dire la possibilité pour toute coalition A de s'isoler du reste de la société et de régler ses affaires en famille. Or, si l'hypothèse (H 1) (propriété privée) assure en quelque sorte l'indépendance financière de chacun, l'hypothèse (H 2) (égoïsme des préférences) assure l'indépendance psychologique. Il n'y a pas de biais par lequel les membres de $S \backslash A$ puissent peser sur la coalition A, ni restrictions matérielles ni pressions psychologiques. Cela se voit par le fait que seuls les membres de A interviennent dans la formule (3). Il en irait autrement si par exemple on devait écrire $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \succsim_i (\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$, au lieu de $\vec{x}^i \succsim_i \vec{y}^i$.

On arrive donc à définir comme acceptables les allocations réalisables qui échappent à tous les veto. C'est ce que formalise le concept du noyau :

DEFINITION 1

Dans une économie de propriété privée, on dit qu'une coalition $A \subset S$ *bloque* l'allocation $(x^1, \ldots, x^m)$ s'il existe des paniers de biens $y^i \in \mathbb{R}^l_+$, $i \in A$, tels que :

$$\forall\, i \in A,\ \vec{y}^i \succ_i \vec{x}^i \qquad \text{et} \sum_{i \in A} \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \vec{\omega}^i \tag{4}$$

On appelle *noyau* de l'économie l'ensemble des allocations réalisables qui ne sont bloquées par aucune coalition.

L'analogie avec le concept de noyau d'un jeu coopératif est frappante. Elle n'est pas seulement formelle : à toute économie de propriété privée, on peut associer un jeu coopératif, de telle sorte que le noyau de l'une corresponde au noyau de l'autre. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques notations. Pour toute coalition $A \neq \phi$, on pose :

$$\mathcal{R}\,(A) = \left\{ (\vec{y}^i) \mid \forall\, i \in A,\ \vec{y}^i \in \mathbb{R}^l_+ \ \text{ et } \sum_{i \in A} \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \vec{\omega}^i \right\}$$

$$U\,(A) = \left\{ (u_i\,(\vec{y}^i)) \mid (\vec{y}^i) \in \mathcal{R}\,(A) \right\}$$

$\mathcal{R}(A) \subset (\mathbb{R}^{l}_{+})^{A}$ est l'ensemble des redistributions possibles internes à la coalition A. Pour A = S, on retrouve $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}$, ensemble des allocations réalisables. Et $U(A) \subset \mathbb{R}^{A}$ est l'ensemble des utilités que la coalition A peut assurer simultanément à ses membres.

DEFINITION 2

On appelle *jeu de marché* associé à l'économie de propriété privée le jeu coopératif à *m* personnes où :

$$\forall A \subset S, \; V(A) = U(A) - \underset{m}{\mathbb{R}}{}^{A}_{+} \tag{5}$$

PROPOSITION 3

Si $(\vec{x}^{1}, \ldots, \vec{x}^{m})$ appartient au noyau de l'économie, alors $(u_1(\vec{x}^{1}), \ldots, u^{m}(\vec{x}^{m}))$ appartient au noyau du jeu de marché. Réciproquement, si $(v_1, \ldots, v_m)$ appartient au noyau du jeu de marché, alors on peut trouver dans le noyau de l'économie une allocation $(\vec{x}^{1}, \ldots, \vec{x}^{m})$ telle que $v_i \geqslant u_i(\vec{x}^{i})$ pour tout $i \in S$.

DEMONSTRATION

Elle est très simple. Partons d'une allocation $(\vec{x}^{1}, \ldots, \vec{x}^{m})$ dans le noyau de l'économie, et supposons que l'imputation $(u_1(\vec{x}^{1}), \ldots, u_m(\vec{x}^{m}))$ soit bloquée par une coalition A. Il existe donc une A-imputation $\vec{v} \in V(A)$ telle que $v_i > u_i(\vec{x}_i)$ pour tout $i \in A$. D'après la formule (5), on peut trouver une famille $(\vec{y}^{i})_{i \in A}$, appartenant à $\mathcal{R}(A)$ et vérifiant $u_i(\vec{y}^{i}) \geqslant v_i$ pour tout $i \in A$. On aura donc $u_i(\vec{y}^{i}) > u_i(\vec{x}^{i})$, et la coalition A bloquera l'allocation $(\vec{x}^{1}, \ldots, \vec{x}^{m})$, ce qui est impossible. D'où la première partie de la proposition.

Pour établir la seconde, partons d'une imputation $(v_1, \ldots, v_m)$ dans le noyau du jeu de marché. D'après la formule (5) ou l'on prend A = S, on peut trouver une allocation réalisable $(\vec{x}^{1}, \ldots, \vec{x}^{m})$ telle que $u_i(\vec{x}^{i}) \geqslant v_i$ pour tout $i \in S$. Si cette allocation était bloquée par une coalition A, on pourrait trouver une famille $(\vec{y}^{i})_{i \in A}$, appartenant à $\mathcal{R}(A)$, et vérifiant $u_i(\vec{y}^{i}) > u_i(\vec{x}^{i})$ pour tout $i \in A$. Toujours d'après la formule (5), les $u_i(\vec{y}_i)$ sont les coordonnées d'un point de V (A), et l'on vient de montrer que $u_i(\vec{y}^{i}) > v_i$ pour tout $i \in A$. La coalition A bloquerait donc l'imputation $(v_1, \ldots, v_m)$, ce qui est impossible. D'où la deuxième partie de la proposition.

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 4

Le noyau d'une économie de propriété privée est non vide si et seulement si le noyau du jeu de marché associé est non vide.

On est donc amené à se demander si ce jeu de marché est équilibré. Miraculeusement, cette condition d'équilibre, d'interprétation si délicate dans le cadre général de la théorie des jeux, se traduit ici par une condition de convexité, parfaitement naturelle.

PROPOSITION 5

Si les préordres $\succsim_i$ des agents $i \in S$ sont tous convexes, le jeu de marché associé à l'économie considérée est équilibré.

DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{C}$ une structure équilibrée de coalitions, et $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ une imputation vérifiant $\pi_C \vec{v} \in V(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. Il s'agit de montrer que $\vec{v} \in V(S)$.

Faisant usage de la formule (5), j'écris l'hypothèse $\pi_C \vec{v} \in V(C)$ de la manière suivante. Pour toute coalition $C \in \mathcal{C}$, il existe des paniers de biens $\vec{y}^{\,i}_C$, $i \in C$, tels que :

$$\sum_{i \in C} \vec{y}^{\,i}_C = \sum_{i \in C} \vec{\omega}^{\,i} \tag{6}$$

$$\forall\, i \in C,\ u_i\,(\vec{y}^{\,i}_C) \geqslant v_i \tag{7}$$

Comme la structure $\mathcal{C}$ est équilibrée, je peux associer à chaque $C \in \mathcal{C}$ un coefficient $\alpha_C > 0$, de telle sorte que :

$$\forall\, i \in S,\ \sum_{C \ni i} \alpha_C = 1 \tag{8}$$

où $?_i$ est l'ensemble des $C \in \mathcal{C}$ qui contiennent *i*. Je définis une allocation $(\vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^m)$ par les équations :

$$\forall\ i \in S,\ \vec{z}^i = \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C\ \vec{y}^i_C \tag{9}$$

D'après les deux formules précédentes, $\vec{z}^i$ est une combinaison convexe des $\vec{y}^i_C$, $C \in \mathcal{C}_i$. Comme $\mathbb{R}^l_+$ est convexe et contient les $\vec{y}^i$, il contient certainement les $\vec{z}^i$. Donc :

$$\forall\ i \in S,\ \vec{z}^i \in \mathbb{R}^l_+ \tag{10}$$

D'après la proposition I.4.10, la fonction u_i est quasi-concave.

L'ensemble des $\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+$ vérifiant $u_i\ (\vec{x}) \geqslant v_i$ est donc convexe. D'après la formule (7), il contient tous les $\vec{y}^i_C$, pour $C \in \mathcal{C}_i$. Il contient donc $\vec{z}^i$, d'où :

$$\forall\ i \in S,\ \ u_i\ (\vec{z}^i) \geqslant v_i \tag{11}$$

Enfin, je dis que $(\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n)$ est une allocation réalisable. Pour cela, il suffit de calculer :

$$\sum_{i \in S} \vec{z}^i = \sum_{i \in S}\ \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C\ \vec{y}^i_C$$

La sommation du second membre porte sur tous les couples $(i, C) \in S \times \mathcal{C}$ tels que $i \in C$. Ceci peut également s'écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in S} \vec{z}^i &= \sum_{C \in \mathcal{C}}\ \sum_{i \in C} \alpha_C\ \vec{y}^i_C \\
&= \sum_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C\ \Big(\sum_{i \in C} \vec{y}^i_C\Big) \\
&= \sum_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C\ \Big(\sum_{i \in C} \vec{\omega}^i\Big) && \text{(formule (6))} \\
&= \sum_{C \in \mathcal{C}}\ \sum_{i \in C} \alpha_C\ \vec{\omega}^i \\
&= \sum_{i \in S}\ \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C\ \vec{\omega}^i \\
&= \sum_{i \in S} \vec{\omega}^i \Big(\sum_{C \in \mathcal{C}_i} \alpha_C\Big) = \sum_{i \in S} \vec{\omega}^i && \text{(formule (8))}
\end{aligned}$$

Donc $(\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_m) \in \mathcal{R}\ (S)$. D'après les formules (10) et (5), $\vec{v} \in V\ (S)$. Le résultat est établi.

On en tire aussitôt un corollaire important :

THEOREME 6

Soit une économie de propriété privée où les préordres $\succsim_i$ des agents $i \in S$ sont convexes et continus. Alors son noyau est un fermé borné non vide de $\mathbb{R}_+^l$.

DEMONSTRATION

D'après le corollaire 4, il suffit de montrer que le jeu de marché associé a un noyau non vide. Vérifions donc les hypothèses du théorème 2.5.

D'après la proposition 5, le jeu est équilibré. On a $V(A) = U(A) - \mathbb{R}_+^A$, et $U(A)$ est l'image de $\mathcal{R}(A)$ par l'application continue de $(\mathbb{R}_+^l)^A$ dans $\mathbb{R}^A$ qui aux $\vec{x}^i$ associe les $u_i(\vec{x}^i)$. En procédant comme dans la démonstration de la proposition I.4.5, on vérifie aisément que $\mathcal{R}(A)$ est compact. Donc $U(A)$ aussi est compact, c'est-à-dire fermé borné. On va en déduire que $V(A)$ est fermé et $W(A)$ est borné.

Soit $\vec{v}_n$ une suite de points de $V(A)$ convergeant vers $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^A$. Il s'agit de montrer que la limite $\vec{v}$ appartient à $V(A)$. On peut écrire $\vec{v}_n = \vec{u}_n - \vec{w}_n$ avec $\vec{u}_n \in U(A)$ et $-\vec{w}_n \in \mathbb{R}_+^A$. Comme $U(A)$ est compact, on peut extraire de la suite $\vec{u}_n$ une sous-suite $\vec{u}_{n_k}$ convergeant vers un point $\vec{u}_\infty$ de $U(A)$. La suite $\vec{v}_{n_k}$ converge vers $\vec{v}$ par définition. Donc la suite $-\vec{w}_{n_k} = \vec{v}_{n_k} - \vec{u}_{n_k}$ converge nécessairement vers $-\vec{w}_\infty = \vec{v} - \vec{u}_\infty$. Comme $\mathbb{R}_+^A$ est fermé et contient tous les $-\vec{w}_{n_k}$, il contient $-\vec{w}_\infty$. Donc $\vec{v} = \vec{u}_\infty - \vec{w}_\infty$ appartient à $U(A) - \mathbb{R}_+^A$, ce qu'il fallait démontrer.

Par définition, on a :

$$W(A) = \left\{ \vec{w} \in V(A) \mid \forall i \in A,\ w_i \geqslant u_i(\vec{\omega}^i) \right\}$$

Comme $U(A)$ est borné, on peut trouver des constantes c_i telles que $v_i \leqslant c_i$ pour $\vec{v} \in V(A)$. Comme

$$W(A) \subset V(A) = U(A) - \mathbb{R}_+^A$$

la même inégalité subsiste pour tous les $\vec{w}$ de $W(A)$. Finalement, on a

$$u_i(\vec{\omega}^i) \leqslant w_i \leqslant c_i$$

pour tous les $\vec{w} \in W(A)$. Cet ensemble est donc borné. Par ailleurs il est non vide, puisqu'il contient au moins le vecteur de composantes $u_i(\vec{\omega}^i)$.

Toutes les hypothèses du théorème 2.5 sont vérifiées. Le noyau du jeu de marché est donc non vide, et le noyau de l'économie aussi.

Ce dernier est contenu dans $\mathcal{R}(S)$, qui est borné ; il est donc lui-même borné. Pour montrer qu'il est fermé, prenons une suite d'allocations $(\vec{x}_n^1, \ldots, \vec{x}_n^m)$ du noyau, convergeant vers $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, et montrons que la limite appartient encore au noyau. Elle appartient certainement à $\mathcal{R}(S)$, puisque cet ensemble est fermé. Et si $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ était bloqué par une coalition $A \subset S$, on pourrait trouver des $\vec{y}^i \in \mathbb{R}_+^l$, tels que :

$$\sum_{i \in A} \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \vec{\omega}^i \quad \text{et} \quad \forall i \in A, u_i(\vec{y}^i) > u_i(\vec{x}^i)$$

Puisque $\vec{x}_n^i$ tend vers $\vec{x}^i$ et que les inégalités sont strictes, elles subsisteront pour n assez grand :

$$\forall i \in A, u_i(\vec{y}^i) > u_i(\vec{x}_n^i)$$

ce qui prouverait que les allocations $(\vec{x}_n^1, \ldots, \vec{x}_n^m)$ sont bloquées par la coalition A. Or ceci est impossible, puisqu'elles appartiennent au noyau. D'où le résultat.

Nous avons déjà rencontré au chapitre précédent l'hypothèse de convexité des préférences. Les interprétations proposées au paragraphe I.4 restent d'autant plus valables que les préférences sont supposées égoïstes. Elle traduit des effets de saturation, incitant l'individu à équilibrer sa consommation entre les différents biens. Elle nous a déjà servi dans l'étude des optima de Pareto, étude que nous allons maintenant poursuivre.

Quels sont les rapports entre éléments du noyau et optima de Pareto ? Nous avons déjà fourni une première réponse :

PROPOSITION 7

Toute allocation du noyau est un optimum de Pareto faible.

On peut la préciser, grâce au résultat suivant :

PROPOSITION 8

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ une allocation du noyau. Toute allocation réalisable $(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$ unanimement préférée appartient également au noyau.

DEMONSTRATION

Il est clair que toute coalition bloquant $(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$ bloquerait également $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$.

Pour énoncer le résultat final, nous noterons $\mathcal{N}$ le noyau de l'économie et $\mathcal{P}$ l'ensemble des optima de Pareto stricts.

PROPOSITION 9

Soit une économie de propriété privée, où les préordres de préférence $\succsim_i$ sont convexes et continu $\forall\, i \in S$. Alors $\mathcal{N} \cap \mathcal{P}$ est non vide (1) *et :*

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{P} - \mathbb{R}_+^S \tag{11}$$

DEMONSTRATION

On a vu que le noyau $\mathcal{N}$ était non vide. D'après la proposition I.5.2, pour une allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ de $\mathcal{N}$, on peut trouver un optimum de Pareto strict $(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$ qui soit unanimement préféré :

$$(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in (\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m) - \mathbb{R}_+^S$$

D'après la proposition 8, cette allocation appartient également au noyau, soit :

$$(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{N}$$

Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{N}$ est non vide et la formule (11) est établie.

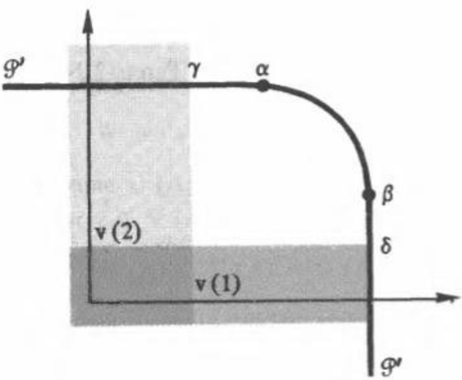


FIGURE II.13
Toujours m = 2. La courbe (illimitée) $\mathcal{P}'$ délimite v (S). Le segment $\gamma\delta$ représente $\mathcal{N}$, le segment $\alpha\beta$ représente $\mathcal{P}$.

(1) Il est borné, mais peut ne pas être fermé.

4. Un pas de plus

Récapitulons la route parcourue jusqu'à présent. L'attribution de manière indifférenciée à la collectivité économique de ressources totales $\vec{\Omega}$ conduit à la notion d'optimum de Pareto strict. L'introduction de la propriété privée des ressources, et avec elle l'attribution aux coalitions de possibilités de blocage, permet de préciser considérablement les choix. L'ensemble $\mathcal{P} \cap \mathfrak{N}$ par lequel se termine le paragraphe précédent, représente la précision maximum que nous ayons atteinte jusqu'à présent.

Mais on peut faire mieux. L'idéal serait de définir le choix social sans ambiguïté aucune, c'est-à-dire d'aboutir par nos éliminations successives à un ensemble ne contenant qu'une seule allocation. Ce n'est pas le cas en général : $\mathcal{P} \cap \mathfrak{N}$, quoique beaucoup plus petit que $\mathcal{P}$, n'en est pas pour autant un singleton, ni même un ensemble fini. Si l'on veut aller plus loin par ce procédé, il faut donc définir de nouveaux critères d'élimination, c'est-à-dire étendre les possibilités de blocage. C'est ce que je fais maintenant suivant un procédé dû à Aubin [1973].

DEFINITION 1

On appelle *coalition floue* toute famille $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de m coefficients positifs. Son *support* A est l'ensemble des $i \in S$ tels que $\alpha_i \neq 0$.
On dit que la coalition floue a *bloque* l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ si l'on peut trouver des paniers de biens $\vec{y}^i \in \mathbb{R}^l_+$, $i \in A$, tels que :

$$\sum_{i \in A} \alpha_i \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \alpha_i \vec{\omega}^i \tag{1}$$

$$\forall\, i \in A, \qquad \vec{y}^i \succ_i \vec{x}^i \tag{2}$$

Si par exemple $\alpha_i = 0$ ou 1 pour tout $i \in S$, alors les conditions (1) et (2) signifient simplement que l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est bloquée par la coalition A. De même, si $\alpha_i = 0$ ou une constante α pour tout $i \in S$, car on peut alors mettre α en facteur des deux côtés de la formule (1). On peut donc dire que l'on a étendu les possibilités de blocage des coalitions aux coalitions floues.

DEFINITION 2

On appelle *noyau flou*, et on note $\mathfrak{W}$, l'ensemble des allocations réalisables qui ne sont bloquées par aucune coalition floue.

Il ressort de ce qui précède qu'une allocation appartenant au noyau flou ne saurait être bloquée par aucune coalition, et appartient donc au noyau tout court :

$$\mathfrak{W} \subset \mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^{lm} \tag{3}$$

Les possibilités de blocage ont été étendues de manière considérable : il suffit de remarquer qu'il y a une infinité de coalitions floues, chacune avec un droit de veto, alors qu'il n'y avait que 2^m coalitions. Il faut donc s'attendre à ce que $\mathfrak{W}$ soit beaucoup plus petit que $\mathfrak{N}$. Je vais essayer de caractériser cet ensemble. Pour cela, je vais avoir besoin d'un intermédiaire ; à toute allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, j'associe l'ensemble $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^l$ des points $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^l$ tels qu'il existe une coalition floue α, et des paniers de biens $\vec{y}^i \in \mathbb{R}_+^l$, $i \in A$, vérifiant :

$$\forall\, i \in A, \vec{y}^i \succ_i \vec{x}^i \tag{4}$$

$$\vec{\xi} = \sum_{i \in A} \alpha_i (\vec{y}^i - \vec{\omega}^i) \tag{5}$$

LEMME 1.

L'ensemble $\mathfrak{X}$ contient l'origine si et seulement si l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ n'appartient pas à $\mathfrak{W}$.

DEMONSTRATION

Dire que l'on peut prendre $\vec{\xi} = \vec{0}$ dans la formule (5) signifie précisément que la coalition floue a bloque l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, qui ne saurait donc appartenir au noyau flou.

LEMME 2.

L'ensemble $\mathfrak{X}$ est toujours convexe, à condition que les préordres individuels $\succsim_i$ le soient.

DEMONSTRATION

Soient $\vec{\zeta}$ et $\vec{\eta}$ deux points de $\mathfrak{X}$, et λ un nombre compris entre 0 et 1. Il s'agit de montrer que $\lambda \vec{\zeta} + (1 - \lambda) \vec{\eta}$ appartient encore à $\mathfrak{X}$. On a :

$$\vec{\zeta} = \sum_{i \in A} \gamma_i (\vec{u}^i - \vec{\omega}^i) \text{ avec } \vec{u}^i \succ_i \vec{x}^i \tag{6}$$

$$\vec{\eta} = \sum_{i \in B} \beta_i (\vec{v}^i - \vec{\omega}^i) \text{ avec } \vec{v}^i \succ_i \vec{x}^i \tag{7}$$

D'où, en posant $A' = A \setminus A \cap B$ et $B' = B \setminus A \cap B$:

$$\lambda \vec{\xi} + (1-\lambda)\vec{\eta} = \sum_{A\cap B} [\lambda \gamma_i (\vec{u}^i - \vec{\omega}^i) + (1-\lambda)\beta_i (\vec{v}^i - \omega^i)]$$

$$+ \sum_{A'} \lambda \gamma_i (\vec{u}^i - \vec{\omega}^i) + \sum_{B'} (1-\lambda)\beta_i (\vec{v}^i - \vec{\omega}^i) \qquad (8)$$

Pour $i \in A \cap B$, définissons $w^i \in \mathbb{R}^l_+$ par :

$$\vec{w}^i = (\lambda \gamma_i \vec{u}^i + (1-\lambda)\beta_i \vec{v}^i) / (\lambda \gamma_i + (1-\lambda)\beta_i)$$

On vérifie aisément que ceci se met sous la forme $\vec{w}^i = \mu_i \vec{u}^i + (1-\mu_i)\vec{v}^i$, avec $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$, c'est-à-dire que $\vec{w}^i$ est une combinaison convexe de $\vec{u}^i$ et $\vec{v}^i$. Comme le préordre $\succsim_i$ est convexe, les relations (6) et (7) impliquent que :

$$\vec{w}^i \succ_i \vec{x}^i \ (^1)$$

L'équation (8) se met alors sous la forme :

$$\lambda \vec{\xi} + (1-\lambda)\vec{\eta} = \sum_{A\cap B} (\lambda \gamma_i + (1-\lambda)\beta_i)(\vec{w}^i - \vec{\omega}^i)$$

$$+ \sum_{A'} \lambda \gamma_i (\vec{u}^i - \vec{\omega}^i) + \sum_{B'} (1-\lambda)\beta_i (\vec{v}^i - \vec{\omega}^i)$$

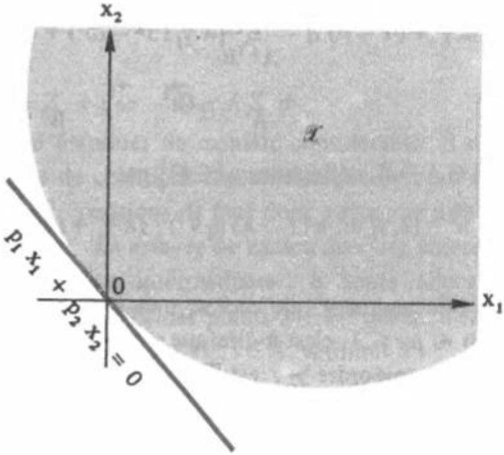
En définissant une coalition floue a par $\alpha_i = (\lambda \gamma_i + (1-\lambda)\beta_i)$ pour $i \in A \cap B$, $\alpha_i = \lambda \gamma_i$ pour $i \in A'$, $\alpha_i = (1-\lambda)\beta_i$ pour $i \in B'$, $\alpha_i = 0$ pour $i \notin A \cup B$, et des paniers de biens $\vec{y}^i = \vec{w}^i$ pour $i \in A \cap B$, $\vec{y}^i = \vec{u}^i$ pour $i \in A'$, $\vec{y}^i = \vec{v}^i$ pour $i \in B'$, on constate que les conditions (4) et (5) sont satisfaites pour $\vec{\xi} = \lambda \vec{\xi} + (1-\lambda)\vec{\eta}$. Ceci signifie précisément que ce point appartient à $\mathcal{X}$, ce qu'il fallait démontrer.

Les allocations $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ de $\mathcal{W}$ sont donc exactement celles pour lesquelles l'ensemble convexe $\mathcal{X}$ ne contient pas l'origine. D'après le théorème de Minkowski, cela équivaut à dire que $\mathcal{X}$ peut être séparé de l'origine par un hyperplan (pourvu toutefois qu'il soit non vide), d'où la caractérisation suivante :

(1) Comparons $\vec{u}^i$ et $\vec{v}^i$. Dans le cas où $\vec{u}^i \succsim_i \vec{v}^i$, l'ensemble des $\vec{w}$ préférées à $\vec{v}^i$ est convexe, contient $\vec{u}^i$ et $\vec{v}^i$, donc $\vec{w}^i$. Par transitivité des préférences, $\vec{w}^i \succ_i \vec{x}^i$. De même dans l'autre cas.

FIGURE II.14

On a représenté l'ensemble $\mathcal{X}$ (grisé) dans le cas $l = 2$, et l'hyperplan (en l'occurrence une droite) le séparant de l'origine.



THEOREME 3

On considère une économie de propriété privée où les préordres individuels $\succsim_i$ *sont tous convexes, et une allocation réalisable* $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ *ne saturant aucun consommateur*

$$\forall i \in S \qquad \exists \vec{z}^i \in \mathbb{R}^l_{n+} : \vec{z}^i \succ_i \vec{x}^i \tag{9}$$

Cette allocation appartient au noyau flou $\mathcal{W}$ *si et seulement si on peut trouver des coefficients* $(p_1, \ldots, p_l)$ *non tous nuls tels que, pour tout* $i \in S$:

$$\vec{y} \succ_i \vec{x}^i \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} p_k y_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k^i. \tag{10}$$

DEMONSTRATION

La condition de non-saturation exprime simplement que l'ensemble $\mathcal{X}$ n'est pas vide. Dire que $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathcal{W}$ signifie alors que l'on peut séparer $\mathcal{X}$ de l'origine par un hyperplan dans $\mathbb{R}^l$. Cela veut dire qu'il existe une famille $(p_1, \ldots, p_l)$ de coefficients non tous nuls telle que, pour toute coalition floue a et toute famille $\vec{y}^i \in \mathbb{R}^l_+$, $i \in A$, vérifiant $u_i(\vec{y}^i) > u_i(\vec{x}^i)$ $\forall i \in A$, on ait :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k \xi_k = \sum_{k=1}^{l} \sum_{i \in A} p_k \alpha_i (y_k^i - \omega_k^i) \geqslant 0 \tag{11}$$

On peut prendre par exemple la coalition floue $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ définie par $\alpha_j = 1$ si $j = i$, $\alpha_j = 0$ autrement. Cela donne l'inégalité, valable pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^l_{n+}$ tel que $u_i(\vec{y}) > u_i(\vec{x}^i)$:

$$\sum_{k=1}^{l} p_k (y_k^i - \omega_k^i) \geqslant 0$$

Réciproquement, si les m inégalités de ce type, obtenues en faisant varier i dans S, sont satisfaites, il suffit de les multiplier respectivement par les m nombres positifs α_i et de les ajouter pour obtenir l'inégalité (11). D'où la caractérisation annoncée.

La signification économique du théorème 3 apparaît beaucoup plus clairement si l'on renforce légèrement les hypothèses. Cela donne :

COROLLAIRE 4

On considère une économie de propriété privée dans laquelle, pour chaque $i \in S$:

(a) *le préordre* $\succsim_i$ *est convexe et continu*

(b) $\vec{\omega}^i \in \mathring{\mathbb{R}}^l_+$, *soit* $\omega^i_k > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant l$

et une allocation réalisable $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ *vérifiant :*

$$\forall\, i \in S, \qquad \exists\, \vec{z}^i \in \mathbb{R}^l_+ : \quad \vec{z}^i_n \to x \ \ et \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \vec{z}^i_n \succ_i x^i \tag{12}$$

Cette allocation appartient au noyau flou si et seulement si on peut trouver des coefficients $(p_1, \ldots, p_l)$ *non tous nuls tels que, pour tout* $i \in S$

$$\sum_{k=1}^{l} p_k x^i_k = \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k \tag{13}$$

$$[\vec{y} \in \mathbb{R}^l_+ \ \ et \ \ \sum_{k=1}^{l} p_k y_k \leqslant \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k] \Rightarrow \vec{x}^i \succsim_i \vec{y} \tag{14}$$

DEMONSTRATION

Considérons la suite $\vec{z}^i_n \in \mathbb{R}^l_+$ de la condition (12). D'après le théorème 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k z^i_{nk} \geqslant \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k .$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on a :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k x^i_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k \tag{15}$$

Pour chaque $i \in S$ on a une inégalité de ce type. En les ajoutant, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} p_k x^i_k \geqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k \tag{16}$$

On a l'égalité dans cette formule si et seulement si, pour chaque $i \in S$, l'inégalité (15) est en fait une égalité. Or, il suffit d'écrire que l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est réalisable :

$$\forall k, \ \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i = \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i$$

pour obtenir, après multiplication par p_k et sommation en k, l'égalité désirée :

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} p_k x_k^i = \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} p_k x_k^i$$

La formule (13) est donc établie, mais le théorème 5 ne nous donne qu'une version affaiblie de la formule (14) :

$$\vec{y} \succ_i \vec{x}^i \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} p_k y_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i \tag{17}$$

qui s'écrit de manière logiquement équivalente :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k y_k < \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i \quad \Rightarrow \vec{x}^i \succsim_i \vec{y} \tag{18}$$

On s'est servi du fait que le préordre est total : les assertions $\vec{x}^i \succsim_i \vec{y}$ et $\vec{y} \succ \vec{x}^i$ sont les négations l'une de l'autre. La formule (18) donne la formule (14) dans le cas où l'inégalité du premier membre est stricte. Reste à examiner le cas d'égalité :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k y_k = \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i \tag{19}$$

Je dis que si $\vec{y} \in \mathbb{R}_+^l$ vérifie l'équation (13), on peut l'approcher par $\vec{y}_n \in \mathbb{R}_+^l$ vérifiant une inégalité stricte :

$$\vec{y}_n \to \vec{y} \ \text{ et } \ \forall\, n \in N, \ \sum_{k=1}^{l} p_k y_{nk} < \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i \tag{20}$$

On en tire $\vec{x}^i \succsim_i \vec{y}_n$ grâce à la formule (18), et comme le préordre est continu, on peut passer à la limite quand $n \to \infty$. On obtient finalement $\vec{x}^i \succsim_i \vec{y}$, le résultat désiré.

Reste à établir l'existence d'une suite $\vec{y}_n \in \mathbb{R}_+^l$ vérifiant les conditions (20). Pour cela, je commence par choisir un point $\vec{\eta} \in \mathbb{R}_+^l$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k \eta_k < \sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k^i \tag{21}$$

ce qui est possible puisque $\vec{\omega}$ appartient à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Je pose alors :

$$\vec{y}_n = (1 - \tfrac{1}{n})\, \vec{y} + \tfrac{1}{n}\, \vec{\eta}$$

On vérifie immédiatement que la suite $\vec{y}_n$ tend vers $\vec{y}$ et que chaque vecteur $\vec{y}_n$ a ses composantes positives. On calcule la somme en tenant compte de (13), (19) et (21) :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k y_{nk} = (1 - \frac{1}{n}) \sum_{k=1}^{l} p_k y_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{l} p_k \eta_k$$
$$< (1 - \frac{1}{n}) \sum_{k=1}^{l} p_k y_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k = \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i$$

Au niveau des hypothèses, il n'y a que peu de différences entre le théorème *3* et le corollaire 4. On a introduit une hypothèse supplémentaire (b), suivant laquelle chacun des agents est doté de chaque bien. Si peu que ce soit, l'agent *i* possède du bien *k* : la quantité ω_k^i peut être très petite, elle n'est jamais nulle. On a aussi remplacé l'hypothèse (9) de non-saturation globale par une hypothèse (12) de non-saturation locale : quelque petit que ce soit le voisinage de $\vec{x}^i$ que l'on se donne, l'agent *i* pourra toujours y trouver un panier de biens $\vec{z}^i$ qu'il préfère strictement à $\vec{x}^i$. Bien entendu, la condition locale entraîne la condition globale. Réciproquement, si les préordres de préférence peuvent être représentés par des fonctions d'utilité concaves, la condition globale entraîne la condition locale.

Par contre, au niveau des conclusions, le corollaire 4 est beaucoup plus précis que le théorème 3, et permet une interprétation économique complète. Les coefficients $(p_1, \ldots, p_l)$ sont les prix respectifs des *l* biens. L'expression $\sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k^i$ est la somme que peut obtenir l'agent *i* en vendant ce qu'il possède initialement. L'équation (13) exprime que c'est exactement cette somme qu'il lui faudra payer s'il veut obtenir le panier de biens $\vec{x}^i$. L'équation (14) signifie qu'il n'y a pas de façon de dépenser son argent qui lui procure davantage de satisfaction. En d'autres termes, $\vec{x}^i$ est le meilleur choix de l'individu *i*. Je ne fais qu'esquisser une analyse qui sera reprise à loisir dans le chapitre suivant.

Arrêtons-nous là, et jetons un coup d'œil sur la route parcourue depuis le début de ce chapitre. Nous avons constamment augmenté les possibilités de coopération entre individus, et au terme de cette démarche, nous nous trouvons avoir isolé un ensemble $\mathfrak{W}$ d'allocations réalisables, qui se caractérisent naturellement en termes de prix. Les questions en suspens sont :

(a) quelle interprétation donner aux coalitions floues ?

(b) $\mathfrak{W}$ est-il non vide ?

(c) $\mathfrak{W}$ est-il réduit à un point ?

La première question a fait couler beaucoup d'encre. L'interprétation la plus satisfaisante consiste à imaginer une société S_n bâtie sur le modèle de S, mais possédant n fois plus d'individus. Ainsi, pour chaque $i \in S$, elle aura n agents du type i, c'est-à-dire dotés du préordre $\succsim_i$ et des ressources $\vec{\omega}^i$. On peut par exemple imaginer que chaque agent de la société initiale S ait *n* descendants identiques à lui dans la nouvelle société S_n. Une coalition quelconque $\mathfrak{A}$ de S_n est définie par la donnée des types d'agents représentés et du nombre d'individus de chaque type, c'est-à-dire d'une coalition A de S et d'un entier $a_{ni} \leqslant n$ pour chaque $i \in A$. Dire que la coalition $\mathfrak{A}$ peut garantir le panier de biens $\vec{y}^i$ à chacun de ses membres de type *i* s'exprimera par l'équation :

$$\sum_{i \in A} \frac{a_{ni}}{n} \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \frac{a_{ni}}{n} \vec{\omega}^i$$

(on a divisé les deux membres par n), ou encore, en posant $a_{ni}/n = \alpha_i$:

$$\sum_{i \in A} \alpha_i \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \alpha_i \vec{\omega}^i \tag{22}$$

Attribuons le panier de biens $\vec{x}^i \in \mathbb{R}^l$ à chaque agent de type *i* ; dire que cette coalition est bloquée par la coalition $\mathfrak{A}$ s'écrit :

$$\forall i \in A, \ \vec{y}^i \succ_i \vec{x}^i \tag{23}$$

L'analogie entre la définition 1 et les conditions (22) et (23) est claire, particulièrement si on divise par $\sum_{i \in A} \alpha_i$ les deux membres de l'équation (2). On obtient alors l'équation :

$$\sum_{i \in A} \alpha'_i \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \alpha'_i \vec{\omega}^i \tag{24}$$

dont les coefficients sont des réels compris entre 0 et 1. On peut les approcher d'aussi près que l'on veut par des rationnels. En d'autres termes, quand $n \to \infty$, les a_{ni} peuvent être choisis de telle sorte que les coefficients a_{ni}/n de l'équation (22) convergent vers les α'_i. En ce sens, on peut dire que les coalitions floues représentent les coalitions d'une économie semblable à l'économie initiale mais ayant un très grand nombre d'individus : un « agrandissement » en quelque sorte.

Cette démarche, consistant à faire croître l'économie indéfiment en respectant les types d'agents et leurs proportions, peut être menée rigoureusement jusqu'à son terme. On montre alors que $\mathfrak{W}$ représente la limite des noyaux successifs, ou encore, le noyau d'une certaine économie limite. Voir pour cela Debreu-Scarf [1963] ou Hildenbrand [1970]. D'un point de vue pratique, nous retiendrons que si le nombre d'agents est assez grand, le noyau $\mathfrak{N}$ de l'économie diffère peu de son noyau flou $\mathfrak{W}$. Ceci pouvait déjà se lire dans la définition 3.1. : le noyau est défini par $2^m - 1$ conditions (une pour chaque coalition non vide) dans un espace de dimension lm (celui des allocations). Le nombre d'inégalités à satisfaire croît beaucoup plus vite avec m que le nombre de variables.

Mais je procéderai autrement. Certes, par la première méthode, on peut montrer que $\mathfrak{W}$ est non vide, c'est-à-dire répondre à la deuxième question. Mais on ne peut pas répondre à la troisième. En outre, ce sont les prix, introduits par le théorème 3, qui font le mieux comprendre la nature de $\mathfrak{W}$. Il semble donc naturel de les faire intervenir de manière beaucoup plus fondamentale, c'est-à-dire de partir des relations (13) et (14) dans l'étude de $\mathfrak{W}$. C'est ce que nous allons faire au chapitre suivant, où la notion de prix sera fondamentale. Le chapitre II aura servi à nous montrer qu'elle n'est nullement artificielle ou imposée de l'extérieur, mais qu'elle surgit des nécessités internes de la coopération entre très grand nombre d'agents économiques.

III. Economies de propriété privée : équilibres

Le chapitre précédent s'est terminé sur la définition d'un ensemble $\mathcal{W}$ d'allocations réalisables, chacune associée à un système de prix. Ceux-ci apparaissent donc naturellement, non par une intervention étrangère, mais d'après les nécessités internes d'une économie de propriété privée.

Je vais reprendre cette analyse, en considérant cette fois la notion de prix comme primitive : c'est le but du présent chapitre et du suivant. Le premier se replacera dans le cadre du chapitre II (égoïsme des préférences, propriété privée des ressources initiales), avec quelques hypothèses supplémentaires (monotonie et régularité des préférences) qui permettront de pousser l'analyse très loin et de recourir à des méthodes géométriques. Ces hypothèses disparaîtront au chapitre IV, qui introduira en outre la production, absente de notre modèle depuis le début. Le problème de l'équilibre y sera donc traité dans toute sa généralité, le chapitre III étant une sorte de répétition générale. Dans l'un comme dans l'autre on ne fera usage que de prix positifs.

1. Les demandes individuelles

L'introduction d'un système de prix nécessite que les agents se soient mis d'accord sur une certaine unité de compte. Celle-ci permet d'évaluer la richesse de chacun : le transfert d'un panier de biens $\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+$ de l'agent *i* vers l'agent *j* se solde par le transfert de $\sum_{k=1}^{l} p_k x_k$ unités de compte de l'agent *j* vers l'agent *i*
Le coefficient p_k est le prix du bien k ; le vecteur $\vec{p} = (p_1 , \ldots, p_l) \in \mathbb{R}^l$ est le système de prix.

On a là une schématisation simple des règlements monétaires que nous pratiquons couramment. Les sommes à payer sont proportionnelles aux quantités achetées, les prix étant par définition les coefficients de proportionnalité. La situation usuelle est celle où ils sont positifs, c'est-à-dire où l'on échange des marchandises contre de l'argent : l'individu i est le vendeur, et j l'acheteur. Mais certains d'entre eux peuvent être négatifs ; si c'est le cas pour p_k, cela signifie en fait que l'agent i doit payer l'agent j pour que celui-ci accepte du bien k. Plutôt qu'un prix, p_k est alors un taux d'indemnisation pour la possession du bien k. Cela n'a de sens que si l'agent j ne veut pas du bien k ; s'il le désirait, il n'aurait pas besoin d'une incitation supplémentaire sous forme d'argent. C'est pourquoi nous ferons dans la suite l'hypothèse que les préférences sont monotones, c'est-à-dire tous les biens sont désirés. Cela nous permettra de nous limiter à des prix positifs.

Notons que l'unité de compte n'a pas besoin d'être elle-même un bien économique, ni même d'avoir un support matériel. Les règlements consistent simplement en un jeu d'écritures, sans accompagnement d'espèces sonnantes et trébuchantes. Comme exemples de telles unités de compte sans contrepartie monétaire, on pourrait citer la guinée britannique, ou l'unité de compte des Communautés Européennes. On pourrait aussi évoquer une société future d'où pièces et billets ont disparu, et où tous les règlements se font par chèques ou cartes de crédit. Mieux vaut avouer que notre unité de compte n'est qu'une très pâle abstraction de la monnaie. Elle ne circule ni n'est thésaurisée, il n'y a pas de banque centrale, pas d'organismes de crédit. Plus profondément encore, dans la réalité économique, la monnaie transmet l'information entre les différents agents d'une part, du passé vers l'avenir d'autre part. Ce rôle disparaît dans notre modèle trop idéal, où les agents communiquent parfaitement et où l'avenir est parfaitement connu. Dans cet univers sans risques, il n'y a de place ni pour des thésauriseurs, ni pour des spéculateurs, ni pour la récession, ni pour l'inflation. En dépit de toute leur importance, ce sont là des phénomènes proprement monétaires qui échappent au modèle.

Que reste-t-il donc à étudier ? C'est là que se séparent deux écoles. Pour les keynesiens, rien ou pas grand-chose, car on ne peut comprendre l'économie que par la monnaie – tout au moins celle des sociétés libérales et industrielles. Pour les néo-classiques, l'essentiel ou beaucoup, car c'est l'échange concret qui est le moteur de l'économie. La circulation des marchandises est la réalité dont la circulation de la monnaie n'est que le reflet inversé. C'est de ce point de vue que nous nous sommes placés, puique je me suis attaché à faire surgir les prix comme une réalité dérivée des biens et de leur répartition, seules réalités primitives. C'est de là aussi que je poursuivrai l'analyse.

Nous nous replaçons donc dans le cadre des économies de propriété privées, mis en place au chapitre précédent, § 3. Je fais encore, et pour toute la suite, les hypothèses (H1) (égoïsme des préférences) et (H2) (propriété privée des ressources initiales). Je fais en outre l'hypothèse.

• (H3) pour tout $i \in S$, le préordre $\succsim_i$ est continu, monotone et strictement convexe.

L'agent *i* est donc caractérisé par sa relation de préférence $\succsim_i$ et ses ressources initiales propres $\vec{\omega}^i \in \mathbb{R}^l_+$. Sa fonction d'utilité u_i ne dépend que du panier de biens $\vec{x}^1$, alloué à l'agent *i*, et se trouve être monotone et strictement quasi-concave :

$$\vec{y} \in \vec{x}^i + \mathbb{R}^l_+ \Rightarrow \vec{y} \succsim_i \vec{x}^i$$

$$[\vec{y} \succsim_i \vec{x}^i, \vec{y} \neq \vec{x}^i, 0 < \lambda < 1] \Rightarrow \lambda \vec{y} + (1-\lambda)\vec{x}^i \succ \vec{x}^i$$

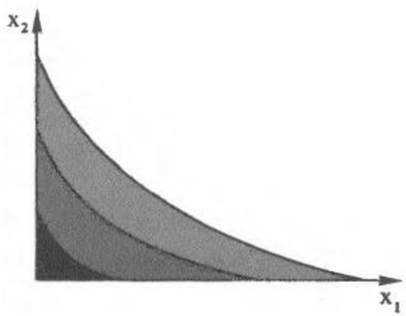


FIGURE III.1

$l = 2$. Un préordre de préférence typique, satisfaisant l'hypothèse (H3).

J'introduis dans ce cadre les prix $p_1, \ldots, p_l$ des différents biens, et je cherche à analyser la situation nouvelle ainsi créée. Tous ces prix seront supposés positifs, puisque tous les biens sont désirés, et qu'il n'y a donc pas de raison de subventionner leur consommation. En d'autres termes, comment les agents vont-ils réagir au système de prix $\vec{p} \in \mathbb{R}^l_+$?

La réponse découle logiquement des divers concepts en jeu, à condition que l'on comprenne bien que ces prix sont fixés. Les individus les subissent et ne les influencent pas. Ils mettent toutes leurs marchandises en circulation, sans tenter d'en garder par devers eux pour faire monter les prix. Certes, l'accaparement résulte bien souvent d'incertitudes sur l'avenir, qui sont absentes de notre modèle : le cas le plus célèbre est la France sous la Terreur. Mais il est utilisé aussi en situation de prévision parfaite : nous sommes habitués à voir des organismes publics stocker les produits agricoles aux frais des contribuables pour maintenir les prix ! Pourquoi donc n'y aurait-il pas d'accaparement dans notre modèle ? On peut invoquer l'esprit civique des citoyens ou la contrainte sociale. Un moyen plus sûr consiste à s'assurer que personne ne détienne une fraction suffisante des ressources initiales pour influer sur les prix de manière significative. Je reviendrai sur cette question un peu plus tard.

Les agents économiques prennent donc les prix comme une donnée extérieure. Au vu du système de prix $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_l)$, l'individu *i* calcule d'abord sa fortune en unités de compte :

$$r^i = \sum_{k=1}^{l} p_k \, \omega_k^i,$$

que nous noterons dorénavant comme un produit scalaire :

$$r^i = \langle \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle.$$

Cette somme lui ouvre un certain éventail de possibilités, d'autant plus étendu que sa richesse est plus grande. Plus précisément, le consommateur *i* peut prétendre à tous les paniers de biens $\vec{y} \in \mathbb{R}_+^l$ qui coûtent moins cher que r^i. Ils constituent l'*ensemble de budget*, que nous noterons :

$$B(r^i) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}_+^l \mid \langle \vec{p}, \vec{y} \rangle \leqslant r^i \right\}. \tag{1}$$

Il ne lui reste plus qu'à se déterminer, ce qu'il fait grâce à sa relation de préférence. L'agent *i* choisit ce qu'il préfère dans son ensemble de budget, c'est-à-dire qu'il se met en quête d'un panier de biens $\vec{x}^i \in B(r^i)$ vérifiant :

$$\forall \vec{y} \in B(r^i), \ \vec{x}^i \succsim_i \vec{y}, \tag{2}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\forall \vec{y} \in B(r^i), \ u_i(\vec{x}^i) \geqslant u_i(\vec{y}). \tag{3}$$

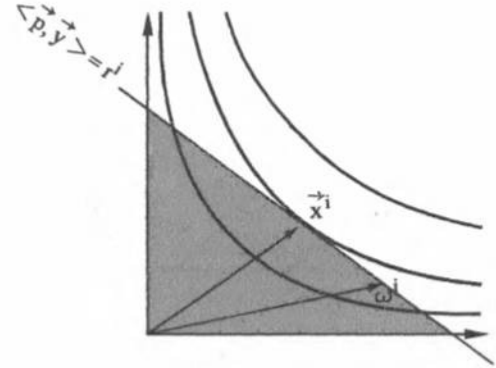


FIGURE III.2

$l = 2$. Le comportement de l'agent i. En grisé l'ensemble de budget B (r^i) : il contient $\vec{\omega}^i$ puisqu'il provient de le vente de celui-ci. Le consommateur peut se payer tous les paniers de biens correspondants : c'est $\vec{x}^i$ qu'il préfère. En ce point, la courbe d'indifférence est tangente à B (r^i), ou plutôt à son bord.

En termes mathématiques, l'agent *i* cherche à maximiser sa fonction d'utilité sur son ensemble de budget. En termes économiques, chacun choisit ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut se payer. C'est possible sans ambiguïté, pourvu que les prix soient tous strictement positifs :

PROPOSITION 1

Supposons le prix de chaque bien strictement positif : $\forall\, k,\ p_k > 0$. *Alors l'ensemble de budget B (r) est convexe, compact et non vide, quel que soit* $r \geqslant 0$.

DEMONSTRATION

De la formule (1) il ressort que B (r) contient au moins l'origine, pourvu que *r* soit positif. C'est l'intersection de l'orthant positif $\mathbf{R}_+^l$ et d'un des demi-espaces fermés limités par l'hyperplan d'équation $< \vec{p}, \vec{y} > = r$. Il est donc convexe fermé. Reste à montrer qu'il est borné.
Soit $\vec{y}$ un point quelconque de B (r). Ses composantes sont toutes positives et vérifient l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k\, y_k \leqslant r.$$

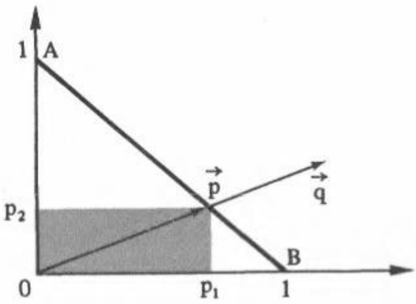


FIGURE III.3

$l = 2$. Le simplexe des prix Π est le segment AB, privé de ses extrémités. Son adhérence $\bar{\Pi}$ est le segment AB tout entier. On peut remplacer tout système de prix positifs $\vec{q}$ par les prix normalisés $\vec{p} = (p_1, p_2)$.

Comme les coefficients p_k sont tous positifs, chacun des termes du premier membre est positif et majoré par r : $p_k\, y_k \leqslant r$ pour $1 \leqslant k \leqslant l$. On peut diviser les deux membres par p_k, puisqu'il est supposé non nul. On obtient l'encadrement :

$$0 \leqslant y_k \leqslant r/p_k \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant l, \tag{4}$$

valable pour tout $\vec{y}$ appartenant à B (r). Cet ensemble est donc borné.

COROLLAIRE 2

Supposons le prix de chaque bien strictement positif : $\forall\, k,\ p_k > 0$. Alors, pour chaque $i \in S$ et chaque $r^i \geqslant 0$, il existe un panier de biens $\vec{x}^i \in B\,(r^i)$ et un seul tel que :

$$\forall\, \vec{y} \in B\,(r^i),\ \vec{x}^i \succsim_i \vec{y}. \tag{2}$$

DEMONSTRATION

D'après le théorème I.4.3, la relation de préférence $\succsim_i$ étant continue, il en sera de même de la fonction d'utilité u_i. Celle-ci atteint donc son maximum sur l'ensemble compact B (r^i) (proposition 1) en un point $\vec{x}^i$. Celui-ci appartient à B (r^i) et vérifie la condition (3), donc la condition (2). Reste à montrer qu'il est unique.

Supposons qu'il y ait deux points $\vec{x}^i \in$ B (r^i) et $\vec{z}^i \in$ B (r^i) vérifiant la condition (2) :

$$\forall\, \vec{y} \in \mathrm{B}\,(r^i),\ \vec{x}^i \succsim_i \vec{y} \text{ et } \vec{z}^i \succsim_i \vec{y}.$$

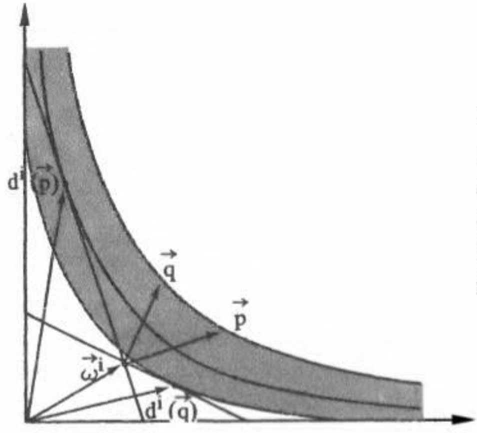


FIGURE III.4

$l = 2$. Construction de la fonction de demande de l'agent i. On mène du point $\vec{\omega}^i$ la droite normale à $\vec{p}$, et le point $d^i(\vec{p})$ est le point de tangence avec une courbe d'indifférence.

En prenant successivement $\vec{y} = \vec{x}^i$ et $\vec{y} = \vec{z}^i$ dans cette formule, on obtient $\vec{x}^i \sim_i \vec{z}^i$. Comme le préordre $\succsim_i$ est strictement convexe, on en déduit que :

$$\left(\frac{1}{2}\vec{x}^i + \frac{1}{2}\vec{z}^i\right) \succ_i \vec{x}^i. \tag{5}$$

Mais $(\vec{x}^i + \vec{z}^i)/2$ est un point de $B(r^i)$, puisque cet ensemble est convexe. La formule (5) contredit donc la maximalité de $\vec{x}^i$, et le résultat est établi.

Si on annonce un système de prix $\vec{p} \in \mathring{\mathbb{R}}^l_+$, l'agent *i* répond en demandant le panier de biens $\vec{x}^i$ défini par le corollaire 2. Remarquons que si on multiplie tous les prix par un même nombre, la demande de l'individu *i* est inchangée. Economiquement, cela revient à changer l'unité de compte, et à dire que cela n'affecte pas les consommations individuelles. Le passage au franc lourd en 1960 a divisé tous les prix par 100. Mathématiquement, cela se traduit par :

PROPOSITION 3

L'ensemble de budget de chaque agent $i \in S$ reste inchangé si tous les prix sont multipliés par une même constante $\lambda > 0$.

DEMONSTRATION

Soit donc $\lambda \vec{p}$ le nouveau système de prix. La fortune de l'agent *i* devient :

$$r^i_\lambda = \langle \lambda \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle$$

et l'ensemble de budget :

$$\begin{aligned} B_\lambda(r^i_\lambda) &= \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^l_+ \mid <\lambda \vec{p}> \leqslant r^i \right. \\ &= \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \lambda <\vec{p}, \vec{y}> \leqslant \lambda <\vec{p}, \vec{\omega}^i> \right. \\ &= \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^l_+ \mid <\vec{p}, \vec{y}> \leqslant <\vec{p}, \vec{\omega}^i> \right. \\ &= B(r^i). \end{aligned}$$

On peut donc imposer aux prix une condition de normalisation. On remplacera par exemple des prix $(p_1, \ldots, p_l)$ par les prix $(\lambda p_1, \ldots, \lambda p_l)$ avec $\lambda = (p_1 + \ldots + p_l)$. Cela revient à ne jamais considérer que des prix positifs de somme un. C'est ce que nous ferons dorénavant. J'appellerai *domaine des prix* l'ensemble

$$\Pi = \left\{ p \in \mathbb{R}^l \mid p_1 + \ldots + p_l = 1, \text{et } p_k > 0 \ \forall\, k \right\} \tag{6}$$

et je noterai $\overline{\Pi}$ son adhérence, qui est le simplexe :

$$\overline{\Pi} = \left\{ p \in \mathbb{R}^l \mid p_1 + \ldots + p_l = 1, \text{et } p_k \geqslant 0 \ \forall\, k \right\} \tag{7}$$

On pourra noter Π_k la k^{eme} face du simplexe, c'est-à-dire :

$$\Pi_k = \left\{ p \in \overline{\Pi} \mid p_k = 0 \right\} \tag{8}$$

de telle sorte que

$$\Pi = \overline{\Pi} \setminus \bigcup_{k=1}^{l} \Pi_k$$

DEFINITION 4

On appelle *fonction de demande individuelle* de l'agent *i* l'application d^i qui, à tout système de prix $\vec{p} \in \Pi$, associe le panier de biens $\vec{x}^i$ que préfère l'agent *i* dans son ensemble de budget.

La donnée des fonctions de demandes individuelles $d^i : \Pi \to \mathbb{R}^l_+$ résume tout le processus que nous avons décrit. Elles jouissent de propriétés remarquables :

PROPOSITION 5

Pour tout $\vec{p} \in \Pi$ et tout $i \in S$, on a :

$$<\vec{p}, d^i(\vec{p})> = <\vec{p}, \vec{\omega}^i>. \tag{9}$$

DEMONSTRATION

Soit $\vec{x}^i = d^i(\vec{p})$. Supposons que

$$<\vec{p}, \vec{x}^i> < <\vec{p}, \vec{\omega}^i>$$

et montrons que l'on arrive à une contradiction. Comme cette inégalité est stricte, elle subsiste si on augmente toutes les composantes de $\vec{x}^i$ d'un nombre $\epsilon > 0$ assez petit :

$$\sum_{k=1}^{l} p_k (x_l^i + \epsilon) < \sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k^i .$$

Soit $\vec{z}^i$ le panier de biens $(x_1^i + \epsilon \quad , \ldots, x_l^i + \epsilon)$. Il est certainement différent de $\vec{x}^i$, et il lui est préféré, puisque le préordre $\succsim_i$ est monotone. L'inégalité précédente montre qu'il appartient aussi à l'ensemble de budget. Mais $\vec{x}^i$ est par définition le seul panier de biens de $B(r^i)$ préféré à tous les autres :

$$\vec{y} \in B(r^i) \Rightarrow \vec{x}^l \succsim_i \vec{y}.$$

Comme $\vec{z}^i \succsim \vec{x}^i$, on a par transitivité : :

$$\vec{y} \in B(r^i) \Rightarrow \vec{z}^i \succsim_i \vec{y}$$

Donc $\vec{z}^i$ jouit des mêmes propriétés que $\vec{x}^i$. D'après l'unicité, $\vec{z}^i = \vec{x}^i$. C'est la contradiction désirée.

En d'autres termes, pour financer sa demande individuelle, l'agent *i* doit vendre tout ce qu'il possède. Il ne peut pas conserver de ressources inemployées. Tournons-nous maintenant vers les propriétés de régularité de d^i : comment varient les demandes individuelles quand les prix changent ?

PROPOSITION 6

Les fonctions de demandes individuelles $d^i : \Pi \to \mathbb{R}_+^l$ sont toutes continues.

DEMONSTRATION

Supposons que ce ne soit pas vrai. On pourrait alors trouver un $i \in S$, une suite $\vec{p}_n \in \Pi$ convergeant vers $\vec{p} \in \Pi$, et un $\epsilon > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \| d^i(\vec{p}_n) - d^i(\vec{p}) \| \geqslant \epsilon \tag{10}$$

Nous allons montrer que c'est absurde. En effet, on sait que $d^i(\vec{p}_n)$ appartient à l'ensemble de budget $B(r_n^i)$, avec $r_n^i = <\vec{p}_n, \vec{\omega}^i>$. On bénéficie donc de l'encadrement (4) :

$$0 \leqslant d_k^i(\vec{p}_n) \leqslant r_n^i / p_{nk} \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant l.$$

On sait aussi que la suite p_{nk} converge vers $p_k > 0$, pour $1 \leqslant k \leqslant l$. On peut donc trouver deux nombres $M > m > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k, \ m \leqslant p_{nk} \leqslant M.$$

En reportant dans l'inégalité précédente, on obtient immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k, \ 0 \leqslant d_k^i(\vec{p}_n) \leqslant \frac{M}{m} \sum_{k=1}^{l} \omega_k^i.$$

La suite $d^i(\vec{p}_n)$ reste donc contenue dans un borné fixe. On peut donc en extraire une sous-suite convergente. Nous la noterons $d^i(\vec{p}_{(n)})$, et $\vec{z}^i$ sa limite :

$$d^i(\vec{p}_{(n)}) \to \vec{z}^i \text{ quand } n \to \infty. \tag{11}$$

Il s'agit maintenant d'identifier $\vec{z}^i$. On sait que les $d^i(\vec{p}_{(n)})$ appartiennent à l'orthant positif $\mathbb{R}_+^n$, qui est fermé ; il en sera de même pour $\vec{z}^i$. En passant à la limite dans les inégalités (qui sont en fait des égalités) :

$$<\vec{p}_n, d^i(\vec{p}_n)> \leqslant <\vec{p}_n, \vec{\omega}^i>$$

on obtient :

$$<\vec{p}, \vec{z}^i> \leqslant <\vec{p}, \vec{\omega}^i>,$$

donc $\vec{z}^i$ appartient à l'ensemble de budget $B(r^i)$, avec $r^i = <\vec{p}, \vec{\omega}^i>$. Je dis que c'est le panier de biens que l'agent *i* préfère dans cet ensemble, c'est-à-dire que $\vec{z}^i = d^i(\vec{p})$.

En effet, commençons par comparer $\vec{z}^i$ aux paniers de biens $\vec{y}$ tels que :

$$<\vec{p}, \vec{y}> < <\vec{p}, \omega^i>.$$

Comme l'inégalité est stricte, elle subsistera dans tout un voisinage de $\vec{p}$. On pourra donc trouver N assez grand pour que :

$$\forall n \geqslant N, <\vec{p}_n, \vec{y}> < <\vec{p}_n, \vec{\omega}^i>.$$

Par définition des fonctions de demandes individuelles, ceci implique que :

$$\forall n \geqslant N, \ d^i(\vec{p}_n) \succsim_i \vec{y}.$$

Comme le préordre $\succsim_i$ est continu, et que la suite extraite $d^i(\vec{p}_{(n)})$ converge vers $\vec{z}^i$, on obtient par passage à la limite :

$$z^i \succsim_i \vec{y}.$$

On a donc montré que $\vec{z}^i$ est préféré à tout panier de biens qui coûte strictement moins cher que r^i. Dans le cas d'égalité :

$$<\vec{p}, \vec{y}> = r^i$$

il suffit d'approcher $\vec{y}$ par la suite $\vec{y}_n = (1 - \frac{1}{n})\vec{y}$. On aura alors :

$$<\vec{p}, \vec{y}_n> = (1 - \frac{1}{n})\, r^i < r^i \qquad (^1)$$

donc $\vec{z}^i \succsim_i \vec{y}_n$ d'après ce qui précède, et $\vec{z}^i \succsim_i \vec{y}$ par passage à la limite.

On a ainsi montré que $\vec{z}^i$ jouit de toutes les propriétés de $d^i(\vec{p})$. D'après l'unicité :

$$\vec{z}^i = d^i(\vec{p})$$

et la formule (11) s'écrit donc :

$$d^i(\vec{p}_{(n)}) \to d^i(\vec{p}). \qquad (12)$$

Mais l'hypothèse (10) signifie justement qu'on ne peut extraire de la suite $d^i(\vec{p}_n)$ aucune sous-suite convergeant vers $d^i(\vec{p})$. Les formules (10) et (12) nous fournissent donc la contradiction cherchée.

Il nous reste à étudier le comportement du consommateur quand le prix d'un des biens devient nul. Supposons par exemple $p_1 = 0$; alors l'ensemble de budget s'écrit :

$$B(r^i) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^l_+ \mid p_2 y_2 + \ldots + p_l y_l \leqslant r^i \right\} .$$

On voit que la première composante y_1 n'intervient plus : si $(y_1, \ldots, y_l)$ appartient à $B(r^i)$, il en sera de même pour $(y'_1, \ldots, y_l)$, quel que soit le nombre $y'_1 \geqslant 0$. Géométriquement cela se traduit par le fait que $B(r^i)$ est une réunion de demi-droites parallèles à l'axe des y_1. Economiquement, cela exprime que le bien 1 est gratuit, si bien qu'on peut s'en procurer des quantités illimitées. Mais n'oublions pas que les préordres de préférences sont monotones, c'est-à-

---

(1) L'inégalité stricte n'a plus lieu si $r^i = 0$. Mais dans le cas $B(r^i)$ ne contient que l'origine, et on a donc directement l'égalité $\vec{z}^i = \vec{0} = d^i(\vec{p})$.

dire que tous les biens sont désirés. L'agent *i* ne sera donc jamais rassasié de bien 1. Et comme cela ne lui coûte rien, il n'en consommera jamais assez à son goût ! L'agent *i* ne peut donc plus formuler de demande individuelle en maximisant son utilité.

Si le prix p_1, sans être nul, est très faible, il interviendra pour limiter la consommation de bien 1. Mais il autorisera toutefois des consommations y_1 importantes. Pour un même revenu $r^i > 0$, l'inégalité $p_1\, y_1 \leqslant r^i$ montre que l'on peut prendre y_1 d'autant plus grand que p_1 est petit. Comme l'agent *i* n'est jamais rassasié de bien 1, il faut s'attendre à ce que sa demande croisse indéfiniment à mesure que le prix p_1 se rapproche de zéro. C'est effectivement ce qui se passe ; la proposition suivante formalise le comportement des fonctions de demande au bord du domaine des prix Π.

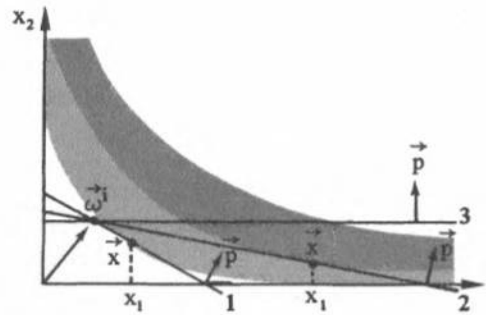


FIGURE III.5

$l = 2$. On a représenté la situation $p_1 \to 0$. On remarque que, à mesure que l'on s'en rapproche, la demande (droites 1 et 2) de bien 1, représentée par le point de contact $\vec{x}$, augmente indéfiniment. Lorsqu'elle est réalisée exactement (droite 3), il n'y a plus de point de contact : il est rejeté à l'infini, ainsi que la demande correspondante.

PROPOSITION 7

On se donne $i \in S$, $r^i \geqslant 0$ et $\vec{p} \in \Pi_k$, c'est-à-dire que $p_k = 0$.

(a) Il n'existe dans $B(r^i)$ aucun panier de biens que l'agent i *préfère à tous les autres :*

$$\forall \vec{x} \in B(r^i),\ \exists \vec{y} \in B(r^i) : \vec{y} \succ_i \vec{x}.$$

(b) Soit $\vec{p}_n$ une suite dans Π convergeant vers $\vec{p}$. Si l'on a $\omega^i_k > 0$ pour tout k, la demande de l'agent i *tendra vers l'infini :*

$$\vec{\omega}^i \in \mathring{\mathbb{R}}^l_+ \text{ et } p_{nk} \to 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} d^i_k(\vec{p}_n) \to +\infty. \tag{13}$$

DEMONSTRATION

On prendra toujours $k = 1$.

(a) Soit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_l) \in B(r^i)$. Pour construire un panier de biens $\vec{y} \in B(r^i)$ qui lui soit préféré, il suffit d'augmenter la quantité de biens 1, c'est-à-dire de poser $\vec{y} = (y_1, x_2, \ldots, x_l)$ avec $y_1 > x_1$. Comme le prix p_1 est nul, le panier de biens $\vec{y}$ appartient encore à $B(r^i)$. Comme le préordre $\succsim_i$ est monotone, on a $\vec{y} \succsim_i \vec{x}$. Il s'agit de montrer que la préférence est stricte. Pour cela, on introduit le panier de biens $\vec{z} = (\frac{x_1 + y_1}{2}, x_2, \ldots, x_l)$. On a $\vec{z} \succ_i \vec{x}$ par stricte convexité du préordre $\succsim_i$, et aussi $\vec{y} \succsim_i \vec{z}$ par monotonie. En utilisant la transitivité, cela donne bien $\vec{y} \succsim_i \vec{x}$.

(b) Soit donc $\vec{p}_n$ une suite de Π convergeant vers $\vec{p} \in \Pi_1$, et supposons que la demande de l'agent *i* ne tende pas vers l'infini. Cela veut dire qu'on peut extraire une sous-suite notée $\vec{p}_{(n)}$ telle que la demande reste bornée :

$$\exists c : \sum_{k=1}^{l} d^i_k(\vec{p}_{(n)}) \leqslant c.$$

Mais alors les vecteurs $d^i(\vec{p}_{(n)})$ restent dans un borné fixe de $\mathbb{R}^l$, à savoir le cube de côtés $[o, c]$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente. Il existe donc une nouvelle sous-suite, notée $\vec{p}_{((n))}$, et un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^l$ tels que :

$$d^i(\vec{p}_{((n))}) \to \vec{x}.$$

Il ne reste plus qu'à identifier cette limite. Les $d^i(\vec{p}_n)$ appartiennent tous à $\mathbb{R}^l_+$, qui est formé ; il en sera de même pour $\vec{x}$, qui est donc un panier de biens. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a les propriétés suivantes qui définissent $d^i(\vec{p}_n)$:

$$< d^i(\vec{p}_n), \vec{p}_n > \leqslant < \vec{\omega}^i, \vec{p}_n >$$

$$< \vec{y}, \vec{p}_n > \leqslant < \vec{\omega}^i, \vec{p}_n > \Rightarrow d^i(\vec{p}_n) \succsim \vec{y}.$$

Elles restent vraies à fortiori pour la sous-suite $\vec{p}_{((n))}$. Comme les ω^i_k sont tous strictement positifs $r^i = < \vec{\omega}^i, \vec{p} >$ est non nul. On peut donc passer à la limite comme dans la proposition 6, et obtenir :

$$< \vec{x}, \vec{p} > \leqslant < \vec{\omega}^i, \vec{p} >$$

$$< \vec{y}, \vec{p} > \leqslant < \vec{\omega}^i, \vec{p} > \Rightarrow \vec{x} \succsim \vec{y}.$$

La première ligne signifie que $\vec{x}$ appartient à B (r^i), et la seconde qu'il est préféré à tout autre panier de biens de B (r^i). Ceci contredit la partie (a) de la proposition. La partie (b) se trouve donc démontrée par l'absurde.

On pourrait s'étonner du peu de précision de la formule (13) : elle dit que la demande de l'un des biens au moins tend vers l'infini, sans qu'il s'agisse nécessairement du bien *k*. C'est qu'il se peut que le prix p_{nj} d'un autre bien *j* tende vers zéro plus vite que p_{nk}, et que la demande de l'agent *i* se concentre alors sur le bien *j*. Cela ne se produira pas si, par exemple, $p_j \neq 0$ pour $j \neq k$: seul le prix du bien *k* tend vers zéro. On peut alors obtenir une conclusion plus précise :

$$[p_k = 0, p_j \neq 0 \text{ pour } j \neq k] \Rightarrow d^i_k(\vec{p}_n) \to \infty. \tag{14}$$

2. Les prix d'équilibre

Voici donc étudiées en détail les demandes individuelles, fonctions du système de prix $\vec{p} \in \Pi$. La question maintenant se pose : seront-elles satisfaites ? Il est clair que cela se traduira par des conditions que devront satisfaire les prix $(p_1, \ldots, p_l)$. Si par exemple on donne au bien 1 un prix de plus en plus petit, chacun en réclamera des quantités de plus en plus grandes. Or les ressources totales en bien 1 sont limitées, puisqu'elles sont égales à Ω_1. Il arrivera donc un moment où elles ne suffiront plus à satisfaire toutes les demandes individuelles.

La condition de possibilité est claire : il faut que l'offre soit égale à la demande pour chaque bien *k*. L'offre de bien *k* est indépendante du système de prix $\vec{p}$.

C'est qu'il n'y a pas encore de production dans notre modèle. L'offre de bien k se réduit donc à la quantité initialement présente dans l'économie, c'est-à-dire à la constante Ω_k. Je rappelle qu'elle est répartie entre les divers agents :

$$\Omega_k = \omega_k^1 + \ldots + \omega_k^m. \tag{1}$$

Quant à la demande de bien k, on l'obtient simplement en ajoutant les demandes individuelles. C'est donc une fonction de tout le système de prix $\vec{p}$ (et non seulement du prix p_k), donnée par :

$$d_k^1(\vec{p}) + \ldots + d_k^m(\vec{p}).$$

On introduit classiquement la *fonction d'excès de demande* $z : \Pi \to \mathbb{R}^l$ définie par :

$$z(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{m} d^i(\vec{p}) - \vec{\Omega}. \tag{2}$$

Comme son nom l'indique, la composante $z_k(\vec{p})$ représente l'excès de la demande sur l'offre pour le bien k. L'égalité de l'offre et de la demande sur tous les marchés se traduit donc par l'équation vectorielle :

$$z(\vec{p}) = \vec{0} \text{ dans } \mathbb{R}^l. \tag{3}$$

DEFINITION 1

Si $\vec{p} \in \Omega$ vérifie l'équation (3), on dit que c'est un *système de prix d'équilibre*, et on dit que $(d^1(\vec{p}), \ldots, d^m(\vec{p}))$ est l'*allocation d'équilibre* associée.

Cette définition est assez condensée, puisqu'elle fait intervenir deux intermédiaires : la fonction d'excès de demande et les fonctions de demandes individuelles. Si l'on s'en débarrasse, on obtient une formulation équivalente :

PROPOSITION 2

$\vec{p} \in \Pi$ est un système de prix d'équilibre, et $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in (\mathbb{R}_+^l)^m$ est l'allocation d'équilibre associée, si et seulement si :

(a) *L'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est réalisable.*

(b) $\forall i \in S, \langle \vec{p}, \vec{x}^i \rangle = \langle \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle$

(c) $\forall i \in S, \forall \vec{y} \in B(\langle \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle), \vec{x}^i \succsim_i \vec{y}.$

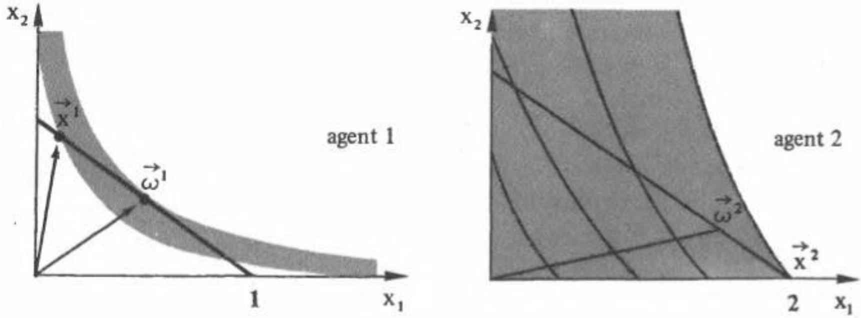


FIGURE III.6

$l = m = 2$. On a représenté la situation des deux agents lors d'un équilibre. On remarque que, d'un diagramme à l'autre, les courbes d'indifférence et la répartition initiale $\vec{\omega}$ changent. Seul le système de prix $\vec{p}$, c'est-à-dire la pente $- p_2/p_1$ des droites 1 et 2, est la même.

DEMONSTRATION

Les conditions (b) et (c) expriment simplement que $\vec{x}^i = d^i(\vec{p})$, d'après la définition 1.4 et la proposition 1.5. La condition (a), en vertu des formules (1) et (2) signifie que $z(\vec{p}) = \vec{0}$.

On retrouve la même caractérisation qu'au corollaire II.4.6 ! L'ensemble des allocations d'équilibre n'est autre que $\mathfrak{W}$. Les procédures décrites aux chapitres II et III, aboutissent donc au même résultat. Elles sont pourtant totalement différentes, par l'esprit comme par la lettre. La première nécessite une information parfaite des individus, et fait intervenir tous les degrés de collaboration possibles. Chaque coalition floue calcule ce qu'elle peut réaliser, et le compare à ce que peuvent proposer les autres. Dans la seconde, au contraire, l'individu réagit au système de prix selon ses ressources et ses goûts personnels, sans aucunement se préoccuper d'autrui. La seule information dont il ait besoin est contenue dans le système de prix normalisé. S'il est bien choisi, c'est-à-dire si c'est un système de prix d'équilibre, l'agrégation des demandes individuelles aboutira au niveau global à une allocation réalisable, sans que personne s'en soit jamais préoccupé.

Les néo-classiques n'ont pas fini de s'étonner de ce petit miracle : chaque individu n'a souci que de ses intérêts propres, et ignore ce que fait son voisin ;

pourtant les demandes individuelles sont globalement cohérentes, puisque leur somme est égale aux ressources totales. Ce miracle subsistera même au chapitre suivant, lorsque nous aurons introduit la production. Dans une formulation célèbre de 1776, Adam Smith l'attribue à une « main invisible ». Il ne s'agit d'ailleurs moins d'un étonnement naïf devant les propriétés mathématiques du modèle que d'un acte de foi dans leur pertinence économique. Démontrer, à partir d'hypothèses de convexité, l'existence de prix d'équilibre, est une chose. Affirmer que les prix observés dans une économie de libre échange sont des prix d'équilibre, en est une autre. Ce n'est pas seulement affirmer que la réalité est conforme au modèle : cela nous apprendrait simplement que seuls les prix d'équilibres permettent d'effectuer les transactions, puisque seuls ils conduisent à un équilibre entre l'offre et la demande. C'est aussi affirmer que les économies concrètes disposent de mécanismes naturels pour calculer ces prix d'équilibre et les imposer sur le marché. La mise en évidence, théorique ou pratique, de tels mécanismes est extrêmement délicate, voire problématique. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

ADAM SMITH, The Wealth of Nations, 1776

Every individual endeavours to employ his capital so that its produce may be of greatest value. He generally neither intends to promote the public interest, nor knows how much he is promoting it. He intends only his own security, only his own gain. And he is in this led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention. By pursuing his own interest, he frequently thus promotes that of society more effectually than when he really intends to promote it.

Mais nous n'avons pas encore rempli notre programme. Nous sommes arrivés à la notion d'allocations d'équilibre par deux voies différentes. Encore faut-il montrer que cette notion n'est pas vide, c'est-à-dire qu'on peut effectivement trouver des allocations dotées de toutes ces propriétés merveilleuses. Cela revient à montrer qu'il existe un système de prix d'équilibre, c'est-à-dire que l'équation vectorielle (3) a des solutions $\vec{p}$ dans Π. Les premiers à avoir résolu ce problème sont Abraham Wald [1933-1936] et John von Neumann [1937]. Leon Walras, le fondateur, dans ses *Eléments d'économie politique pure* de 1874, s'était contenté de montrer que l'équation vectorielle (3) se ramène à un système de $(\ell - 1)$ équations scalaires à $(\ell - 1)$ inconnues. Ce n'est d'ailleurs pas si évident que cela, et il a dû établir à cette occasion la loi qui porte son nom :

PROPOSITION 3

La fonction d'excès de demande satisfait la loi de Walras :

$$\forall\, p \in \Pi,\ < \vec{p}, z(\vec{p}) > = 0. \tag{4}$$

DEMONSTRATION

D'après la proposition 5 :

$$\forall\, i \in S,\ < \vec{p}, d^i(\vec{p}) - \vec{\omega}^i > = 0.$$

En ajoutant toutes ces égalités membre à membre

$$\forall\, i \in S,\ < \vec{p}, \sum_{i=1}^{m} d^i(\vec{p}) - \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i > = 0.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les formules (1) et (2).

Ecrivons alors l'équation vectorielle (3) composante par composante :

$$\left.\begin{array}{l} z_1(p_1, \ldots, p_l) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_l(p_1, \ldots, p_l) = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

On cherche les solutions $\vec{p} \in \Pi$, c'est-à-dire que l'on impose aux inconnues $p_1, \ldots p_l$ les conditions supplémentaires :

$$p_1 > 0, \ldots, p_l > 0. \tag{6}$$

$$p_1 + \ldots + p_l = 1. \tag{7}$$

Les l inconnues ne sont donc pas indépendantes. Heureusement, les l équations ne le sont pas non plus. La loi de Walras que satisfait la fonction z permet de déduire la dernière équation des précédentes par la formule :

$$z_l(p_1, \ldots, p_l) = -\left[\sum_{k=1}^{l-1} p_k\, z_k(p_1, \ldots, p_l)\right] / p_l.$$

De même, la formule (7) permet de déduire la dernière inconnue des précédentes par la formule $p_l = -(p_1 + \ldots + p_{l-1})$. Finalement, le système (5) sous la condition (7) se ramène aux $(\ell - 1)$ équation scalaires à $(\ell - 1)$ inconnues :

$$\left.\begin{array}{l} z_1(p_1, \ldots, p_{l-1}, 1 - p_1 - \ldots - p_{l-1}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{l-1}(p_1, \ldots, p_{l-1}, 1 - p_1 - \ldots - p_{l-1}) = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues constitue une présomption en faveur de l'existence d'une solution. Mais c'est très loin de constituer une preuve. En outre, on n'a pas tenu compte des contraintes (6) de positivité stricte. On est donc encore très loin d'une démonstration rigoureuse. Celle-ci doit faire appel à des méthodes très différentes, les théorèmes de point fixe, dont voici le prototype :

THEOREME 4 (Brouwer)

Toute application continue f du simplexe $\overline{\Pi}$ dans lui-même possède un point fixe :

$$\exists \vec{q} \in \overline{\Pi} : f(\vec{q}) = \vec{q}. \tag{9}$$

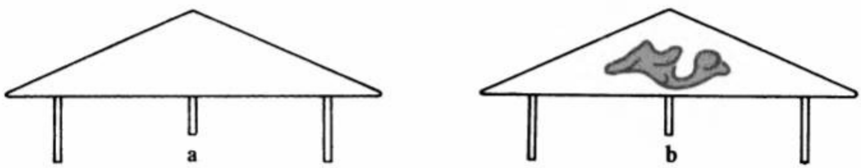


FIGURE III.7

Le théorème de Brouwer en dimension deux peut être compris comme suit. Recouvrons une table triangulaire (simplexe) d'une nappe (a) ; puis retirons cette nappe, étirons-la, froissons-la, roulons-la, et jetons-la sur la table, sans toutefois la déchirer. Alors il y aura toujours un point de la nappe qui n'aura pas bougé, c'est-à-dire qui sera à la verticale du même point de la table.

DEMONSTRATION

C'est le petit KKM (corollaire II.1.6) ! On introduit pour chaque k l'ensemble

$$K_k = \left\{ \vec{p} \in \overline{\Pi} \mid f_k(\vec{p}) - p_k \geqslant 0 \right\}.$$

C'est un fermé, puisque f est continue. On a toujours $f_k(\vec{p})$ positif, puisque $f(\vec{p})$ est supposé appartenir à $\overline{\Pi}$. En particulier :

$$p_k = 0 \Rightarrow f_k(\vec{p}) - p_k \geqslant 0, \tag{10}$$

donc K_k contient la face Π_k. Reste à montrer que les K_k, pour $1 \leqslant k \leqslant l$, recouvrent $\overline{\Pi}$. Si ce n'était pas le cas, il existerait un point $\vec{r} \in \overline{\Pi}$ tel que tous les $f_k(\vec{r}) - r_k$ soient strictement négatifs. En ajoutant tous ces termes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{l} f_k(\vec{r}) - \sum_{k=1}^{l} r_k < 0,$$

Mais puisque $\vec{r}$ et $f(\vec{r})$ appartiennent au simplexe $\overline{\Pi}$, chacune des sommes est égale à 1, d'où une contradiction manifeste.

On peut appliquer le petit KKM à la famille K_k, pour $1 \leqslant k \leqslant l$. Elle a donc une intersection non vide :

$$\exists \vec{q} : \forall k, \vec{q} \in K_k.$$

Ceci signifie que les $f_k(\vec{q}) - q_k$ sont tous positifs. Si l'un d'entre eux n'est pas nul, on obtiendra en les ajoutant une quantité strictement positive :

$$\sum_{k=1}^{l} f_k(\vec{q}) - \sum_{k=1}^{l} q_k > 0.$$

Mais de nouveau, chacune de ces sommes est égale à 1, et l'on obtient une contradiction. Donc les $f_k(\vec{q}) - q_k$ doivent tous être nuls.

On remarquera que $f(\vec{p}) - \vec{p}$ est le vecteur d'origine $\vec{p}$ et d'extrémité $f(\vec{p})$. Quand $\vec{p}$ décrit $\overline{\Pi}$, on dit que $f(\vec{p}) - \vec{p}$ décrit un champ de vecteurs continu sur $\overline{\Pi}$. Sur le bord de $\overline{\Pi}$, ce champ est évidemment dirigé vers l'intérieur ; le lecteur se convaincra aisément que dans ces conditions il doit s'annuler quelque part à l'intérieur. Mais dire que $\vec{q}$ est un zéro du champ signifie précisément que $f(\vec{q}) - \vec{q} = \vec{0}$, c'est-à-dire que $\vec{q}$ est un point fixe. C'est cette démarche que nous avons suivie dans la démonstration du théorème de Brouwer. Le recours au petit KKM a permis d'étayer et de masquer notre intuition géométrique !

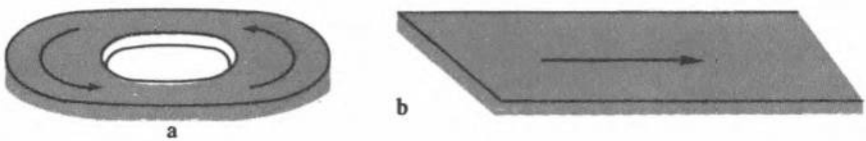


FIGURE III.8

Le théorème de Brouwer est vrai pour d'autres figures que le triangle, par exemple le cercle, plus généralement tous les convexes compacts. Il est faux pour la couronne de la figure **a** (faire tourner la nappe dans le sens des flèches), comme pour la bande infinie de la figure **b** (tirer la nappe dans le sens des flèches : l'une n'est pas convexe, et l'autre n'est pas compacte.

D'un point de vue analytique, le théorème de Brouwer donne des conditions pour que le système d'équations scalaires $f_k(p_1, \ldots, p_l) - p_l = 0$, où $1 \leqslant k \leqslant \ell$, ait des solutions dans $\overline{\Pi}$. Malheureusement, elles ne permettent pas encore de s'attaquer au problème (8). Il nous faut les étendre légèrement. Dans ce but, je vais introduire la notion de correspondance (1).

Une *correspondance* F de X dans Y est une application de X dans $\mathcal{P}(Y)$; on la notera $F : X \twoheadrightarrow Y$. A tout point $x \in Y$, elle associe une partie $F(x) \subset Y$. La notion de correspondance étend la notion d'application. Si $f : X \to Y$ est une application, $F(x) = \{f(x)\}$ est une correspondance ; réciproquement, si $F : X \twoheadrightarrow Y$ est une correspondance, telle que $F(x)$ soit un singleton quel que soit $x \in X$, alors on peut écrire $F(x) = \{f(x)\}$ ce qui définit une application $f : X \to Y$. En d'autres termes, les correspondances se distinguent des applications en ce que $F(x)$ peut contenir plus d'un point. Beaucoup de notions, habituellement associées aux applications, s'étendent sans difficulté aux correspondances. Un point fixe d'une correspondance $F : X \twoheadrightarrow X$ sera un point $x \in X$ tel que $x \in F(x)$. Le graphe d'une correspondance $F : X \to Y$ sera l'ensemble :

$$\text{Graphe } F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\} \; .$$

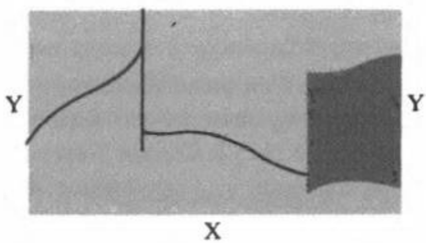


FIGURE III.9

Le graphe d'une correspondance semi-continue supérieurement.

Pour étendre le théorème de Brouwer aux correspondances $F : \overline{\Pi} \twoheadrightarrow \overline{\Pi}$, reste à savoir ce qui va remplacer la continuité des applications. Ce sera l'hypothèse que la correspondance F est de graphe fermé, comme l'expliquent les résultats suivants :

---

(1) On dit aussi multi-application, ou application multivoque.

PROPOSITION 5

Soit $F: X \Subset Y$ une correspondance. On suppose Y borné dans $\mathbb{R}^l$, et tous les $F(x)$ fermés. Alors il est équivalent de dire :

(a) F est de graphe fermé.

(b) Pour tout fermé $T \subset Y$, l'ensemble des x tels que $F(x)$ rencontre T est fermé dans X.

DEMONSTRATION

Montrons que (b) implique (a). Soit donc (x_n, y_n) une suite de points du graphe de F, convergeant vers $(\bar{x}, \bar{y})$; il s'agit de montrer que $(\bar{x}, \bar{y})$ appartient encore au graphe de F. Donnons-nous $\epsilon > 0$ arbitraire, et considérons la boule fermée $B(\bar{y}; \epsilon)$, de centre $\bar{y}$ et de rayon ϵ, dans Y. Comme la suite y_n converge vers $\bar{y}$, cette boule contient tous les y_n à partir d'un certain rang. Mais y_n appartient à $F(x_n)$, par définition du graphe de F. L'ensemble

$$A_\epsilon = \left\{ x \in X \mid F(\bar{x}) \cap B(\bar{y};\epsilon) \neq \phi \right\}$$

contient donc tous les x_n à partir d'un certain rang. D'après l'hypothèse (b), il est fermé. Il contient donc la limite $\bar{x}$, ce qui veut dire que la boule de centre $\bar{y}$ et de rayon ϵ rencontre $F(\bar{x})$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, la distance du point $\bar{y}$ à l'ensemble $F(\bar{x})$ doit être nulle. Comme $F(\bar{x})$ est supposé fermé, on a bien $\bar{y} \in F(\bar{x})$.

Pour montrer que (a) implique (b), on prend une suite x_n de X telle que $F(x_n)$ rencontre T, et on suppose que x_n converge vers $\bar{x}$. Il s'agit de montrer que $F(\bar{x})$ rencontre T. Soit $y_n \in F(X_n) \cap T$. Comme Y est supposé borné, on peut extraire de la suite y_n une sous-suite $y_{(n)}$ convergeant vers un point $\bar{y}$. D'une part, $\bar{y}$ appartient à T, puisque cet ensemble est fermé et contient les $y_{(n)}$. D'autre part, $(\bar{x}, \bar{y})$ appartient au graphe de F, puisque cet ensemble est fermé et contient les $(x_{(n)}, y_{(n)})$. Donc $\bar{y} \in T \cap F(\bar{x})$.

COROLLAIRE 6

Soit $f: X \to Y$ une application. Si l'espace d'arrivée Y est un borné de $\mathbb{R}^l$, il est équivalent de dire :

(a) f est de graphe fermé.

(b) f est continue.

DEMONSTRATION

Il suffit de considérer la correspondance $F(x) = \{ f(x) \}$ et de lui appliquer la proposition précédente. Les $F(x)$ sont des singletons, et sont donc fermés ; dire que $F(x)$ rencontre T signifie que $f(x) \in T$. La condition (b) dit alors que l'image réciproque $f^{-1}(T)$ est fermée dans X, quel que soit T fermé dans Y, ce qui est une caractérisation de la continuité.

Nous pouvons à présent énoncer une extension naturelle du théorème de Brouwer aux correspondances.

THEOREME 7 (Kakutani)

Soit F une correspondance de $\overline{\Pi}$ dans lui-même. On suppose que son graphe est fermé, et que ses valeurs $F(\vec{p})$ sont convexes, fermées, non vides. Alors elle admet un point fixe :

$$\exists \vec{q} \in \overline{\Pi} : \vec{q} \in F(\vec{q}).$$

DEMONSTRATION

Celle que je vais donner consiste à approcher F par une application f, à appliquer à celle-ci le théorème de Brouwer et à passer à la limite. Cette approximation n'est possible que parce que F est à valeurs convexes.

Découpons le simplexe $\overline{\Pi}$ en simplexes semblables, d'arêtes n fois plus petites, donc de volume n^{l-1} fois moindre. Il faudra donc n^{l-1} de ces simplexes pour remplir $\overline{\Pi}$. Soit Σ l'un quelconque d'entre eux, et $\{ \vec{p}^1, \ldots, \vec{p}^l \}$ ses sommets. Tout point de Σ se met sous la forme $\vec{p} = \sum_{k=1} \alpha^k \vec{p}^k$, où les α^k sont des coefficients positifs de somme un. Si l'on se donne pour chaque sommet $\vec{p}^k$ de Σ un point $\vec{q}^k$ de $\overline{\Pi}$, on peut définir une application affine $\varphi : \Sigma \to \overline{\Pi}$ par la formule :

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{l} \alpha^k \vec{p}^k\right) = \sum_{k=1}^{l} \alpha^k \vec{q}^k. \tag{11}$$

Le découpage de $\overline{\Pi}$ en sous-simplexes est déterminé par les sommets de ceux-ci : ils forment un réseau $\mathcal{R}_n$ régulier, de maille $\sqrt{2}/n$. Pour chaque sommet $\vec{p} \in \mathcal{R}_n$, on choisit un point $\vec{q}$ dans $F(\vec{p})$. On emploie le procédé ci-dessus dans chacun des sous-simplexes obtenus par découpage. Si deux d'entre eux, Σ^1 et Σ^2, sont adjacents, ils ont en commun une face et ses $(\ell - 1)$ sommets

$\{\vec{p}^1, \ldots, \vec{p}^{l-1}\}$, et la formule (11) où $\alpha_l = 0$ montre que φ^1 et φ^2 coïncident le long de cette face. Les fonctions φ^i définies sur chaque sous-simplexes Σ^i se recollent donc en une seule fonction $f_n : \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$, dotée des propriétés suivantes :

(a) f_n est continue.

(b) $\forall \vec{p} \in \mathcal{R}_n, f_n(\vec{p}) \in F(\vec{p})$.

(c) Sur chacun des sous-simplexes élémentaires, de côté $\sqrt{2}/n$ de sommets $\{\vec{p}^1, \ldots, \vec{p}^l\} \subset \mathcal{R}_n$; on a :

$$f_n\left(\sum_{k=1}^{l} \alpha^k \vec{p}^k\right) = \sum_{k=1}^{l} \alpha^k f_n(\vec{p}^k). \tag{12}$$

Comme f_n est continue, on peut lui appliquer le théorème de Brouwer. Elle possède donc un point fixe $\vec{q}_n = f_n(\vec{q}_n)$. Ce point appartient nécessairement à l'un des sous-simplexes élémentaires, de sommets $\{\vec{p}_n^1, \ldots, \vec{p}_n^l\} \subset \mathcal{R}_n$. On pourra donc écrire, grâce aux formules (c) et (b) :

$$\vec{q}_n = \sum_{k=1}^{l} \alpha_n^k \vec{p}_n^k = \sum_{k=1}^{l} \alpha_n^k f_n(\vec{p}_n^k) \tag{13}$$

$$\forall k, f_n(\vec{p}_n^k) \in F(\vec{p}_n^k) \tag{14}$$

sans oublier que :

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_n^k = 1 \text{ et } \forall k, \alpha_n^k \geq 0 \tag{15}$$

$$\| \vec{p}_n^k - \vec{p}_n^j \| = \sqrt{2}/n \text{ pour } 1 \leq k, j \leq n. \tag{16}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre *n* vers l'infini. Pour chaque *k* fixé, le sommet $\vec{p}_n^k$, son image $f_n(\vec{p}_n^k)$ et le coefficient α_n^k restent dans un compact fixe quand *n* tend vers l'infini, à savoir, pour les deux premiers le simplexe $\overline{\Pi}$, et pour le dernier l'intervalle [0, 1]. On peut donc extraire des sous-suites convergentes :

$$\vec{p}_{(n)}^k \to \vec{p}^k$$

$$f_{(n)}(\vec{p}_{(n)}^k) \to \vec{r}^k \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq l \tag{17}$$

$$\alpha_{(n)}^k \to \alpha^k \tag{18}$$

En passant à la limite dans la formule (16), on obtient $\| \vec{p}^k - \vec{p}^j \| = 0$, c'est-à-dire que $\vec{p}^k = \vec{p}^j$ pour $1 \leqslant j, k \leqslant l$. On notera $\vec{q}$ ce point, qui est donc la commune limite des suite $\vec{p}^k_{(n)}$:

$$\vec{p}^k_{(n)} \to \vec{q} \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant l. \tag{19}$$

En passant à la limite dans la formule (15), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha^k = 1 \text{ et } \forall k, \alpha^k \geqslant 0. \tag{20}$$

En passant à la limite dans la formule (13), grâce aux convergences (17), (18), (19), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha^k \vec{q} = \sum_{k=1}^{l} \alpha^k \vec{r}^k. \tag{21}$$

Le premier membre n'est autre que $\vec{q}$, à cause de l'égalité (20). Pour évaluer le second, il faut se servir des convergences (17) et (19), et se rappeler la formule (14). Comme le graphe de F est fermé et contient les $(\vec{p}^k_{(n)}, f_{(n)}(\vec{p}^k_{(n)}))$, il contient leur limite $(\vec{p}, \vec{r}^k)$. Donc les $\vec{r}^k$, pour $1 \leqslant k \leqslant l$, appartiennent tous à $F(\vec{q})$. Comme cet ensemble est supposé convexe, il contiendra aussi leur barycentre $\sum_{k=1}^{l} \alpha^k \vec{r}^k$. L'équation (21) nous donne finalement le résultat désiré :

$$\vec{q} \in F(\vec{q}).$$

Le théorème de Kakutani a été inventé pour les besoins de la théorie des jeux. De 1950 à 1970, avant l'introduction des méthodes de topologie différentielle, il a été le principal outil de l'économie mathématique. Les divers résultats d'existence de prix d'équilibre reposent en général sur une variante de Kakutani et sur les propriétés spéciales de la fonction z. Il s'agit d'une part de la loi de Walras, d'autre part de propriétés de continuité rappelées ci-dessous :

PROPOSITION 9

La fonction d'excès de demande $z : \Pi \to \mathbb{R}^l$ *est continue et bornée inférieurement par* $\vec{\Omega}$ *:*

$$\forall \vec{p} \in \Pi, z_k(\vec{p}) \geqslant -\Omega_k = -\sum_{i=1}^{m} \omega_k^i$$

Soit $\vec{p}_n$ une suite de Π convergeant vers un point $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0) \in \bar{\Pi}$. Alors, pourvu que ω_k^i soit non nul pour tout i et tout k :

(i) les $z(\vec{p}_n)$ restent bornés, pour $1 \leqslant k \leqslant r$

(ii) il y a des $k \geqslant r+1$ tels que $z_k(\vec{p}_n) \to +\infty$.

DEMONSTRATION

La première partie résulte immédiatement de la formule (2) : les fonctions d^i sont continues, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^l$. Pour la deuxième, on utilise la proposition 1.7 (b) et la loi de Walras. De la formule (13) et du fait que les d_k^i sont positives, il résulte que l'on doit avoir $d_k^i(\vec{p}_n) \to +\infty$ pour un indice k au moins. En reportant dans la définition de z la demande de l'agent *i*, on obtient que :

$$\exists k \in \{1, \ldots, \ell\} : z_k(\vec{p}_n) \to +\infty .$$

La loi de Walras s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{l} < \vec{p}_{kn}, z_k(\vec{p}_n) >= 0 \tag{22}$$

et l'on sait que les coefficients p_{kn} sont positifs et convergent vers p_k. Or les $z_k(\vec{p}_n)$ sont minorés par $-\Omega_k$; donc, ou bien ils restent bornés, ou bien on peut en extraire une sous-suite $z_k(\vec{p}_{(n)})$ tendant vers $+\infty$. Ce dernier cas ne peut se produire que si la limite p_k est nulle, c'est-à-dire $k \geqslant r+1$; autrement, les termes $< p_{k(n)}, z_k(\vec{p}_{(n)}) >$ tendraient vers $+\infty$, et le premier membre de l'équation (22) ne saurait rester nul.

Je vais à présent démontrer l'existence de prix d'équilibre dans notre contexte, suivant la démarche de Debreu [1975]. Au chapitre suivant, nous établirons un résultat plus général.

THEOREME 10

Soit une économie de propriété privée, satisfaisant les hypothèses (H1), (H2), (H3), et telle qu'initialement chaque agent soit pourvu de tous les biens : $\omega_k^i \neq 0$. Alors il existe au moins un système de prix d'équilibre :

$$\exists \vec{q} \in \Pi : z(\vec{q}) = \vec{0}.$$

DEMONSTRATION

Etant donné un point $\vec{p} \in \Pi$, on lui associe l'ensemble d'indices $I(\vec{p}) \subset$:

$\{1, \ldots, 1\}$ défini par :

$$I(\vec{p}) = \{ k \mid z_k(\vec{p}) = \max_j z_j(\vec{p}) \} \quad ,$$

puis la face de $\overline{\Pi}$ correspondante :

$$\overline{\Pi}_{I(\vec{p})} = \{ \vec{q} \in \overline{\Pi} \mid \forall k \notin I(\vec{p}), q_k = 0 \}$$

Economiquement, cela revient à isoler les biens pour lesquels l'excès de demande est maximum, et à considérer les systèmes de prix pour lesquels tous les autres biens sont gratuits. C'est une procédure de révision drastique ! Nous allons voir que les systèmes de prix qui y sont insensibles sont justement les systèmes de prix d'équilibre.

Je définis une correspondance F de $\overline{\Pi}$ dans lui-même par :

$$\begin{cases} F(\vec{p}) = \overline{\Pi}_{I(\vec{p})} \text{ si } \vec{p} \in \Pi \\ F(\vec{p}) = \{ \vec{q} \in \overline{\Pi} \mid <\vec{p}, \vec{q}> = 0 \} \text{ sinon} \end{cases} \tag{23}$$

Si par exemple $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$, les premières composantes étant non nulles, alors $F(\vec{p})$ sera l'ensemble des $\vec{q} \in \overline{\Pi}$ de la forme $\vec{q} = (0, \ldots, 0, q_{r+1}, \ldots, q_\ell\}$. On remarquera que :

$$\vec{p} \notin \Pi \Rightarrow \vec{p} \notin F(\vec{p}).$$

Les éventuels points fixes de F doivent donc appartenir à Π. De $\vec{q} \in \overline{\Pi}_{I(\vec{q})}$, on tire :

$$z_k(\vec{q}) = z_j(\vec{q}) \text{ pour } 1 \leqslant j, k \leqslant \ell.$$

Le vecteur $z(\vec{q})$ a donc toutes ses composantes égales à un nombre ζ. La loi de Walras s'écrit :

$$0 = <z(\vec{q}), \vec{q}> = \zeta \sum_{k=1}^{l} q_i = \zeta.$$

L'excès de demande est nul pour chaque bien, donc $\vec{q}$ est un système de prix d'équilibre. Réciproquement, si $\vec{q}$ est un système de prix d'équilibre, les $z_k(\vec{q})$ sont tous égaux entre eux et à zéro, donc $I(\vec{q}) = \{1, \ldots, 1\}$, et $F(\vec{q})$ n'est autre que $\overline{\Pi}$ tout entier. En particulier, $\vec{q} \in F(\vec{q})$.

Tout se ramène donc à montrer que la correspondance F de $\overline{\Pi}$ dans lui-même à un point fixe. Visiblement, ses valeurs sont convexes, fermées, non vides. Reste à montrer qu'elle est de graphe fermé. Soit donc $\vec{p}_n$ une suite de $\overline{\Pi}$ convergeant vers $\vec{p}$ dans $\overline{\Pi}$, et $\vec{q}_n \in F(\vec{p}_n)$ une suite convergeant vers $\vec{q}$ dans $\overline{\Pi}$. Il s'agit de montrer que $\vec{q} \in F(\vec{p})$.

Supposons d'abord que $\vec{p}$ appartienne à Π. Alors il en sera de même des $\vec{p}_n$, sauf un nombre fini d'entre eux. Je dis que $I(\vec{p}_n) \subset I(\vec{p})$ à partir d'un certain rang. En effet, dire que $k \notin I(\vec{p})$ signifie qu'on peut trouver un indice $j \neq k$ avec $z_j(\vec{p}) > z_k(\vec{p})$. Or la fonction d'excès de demande z est continue puisque c'est une somme de fonctions continues (formule (2) et proposition 1.6). On aura donc $z_j(\vec{p}_n) > z_k(\vec{p}_n)$ pour *n* assez grand, donc $k \notin I(\vec{p}_n)$, d'où le résultat dans ce cas.

Supposons enfin que $\vec{p}$ appartienne au bord de $\overline{\Pi}$. On peut toujours se ramener au cas où $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$, les p_k étant non nuls pour $k \leqslant r$. Donc, pour chaque $k \leqslant r$, les p_{kn} seront non nuls à partir d'un certain rang. Pour $k \geqslant r + 1$, deux cas se présentent.

Ou bien une infinité de termes $\vec{p}_n$ appartiennent à Π. Ils constituent alors une sous-suite $\vec{p}_{(n)}$ à laquelle on peut appliquer la proposition 8. Pour $k \leqslant r$, l'excès de demande $z_k(\vec{p}_{(n)})$ reste borné, et il existe des $k \geqslant r + 1$ tels que l'excès de demande tende vers $+\infty$. Pour (n) assez grand, l'excès de demande maximum $z_k(\vec{p}_{(n)})$ sera certainement réalisé par des biens d'indice $k \geqslant r + 1$. Ceci s'exprime par l'inclusion $I(\vec{p}_{(n)}) \subset \{ r+1, \ldots, \ell \}$. Donc $F(\vec{p}_{(n)})$ sera contenu dans l'ensemble des points de $\overline{\Pi}$ dont les r premières coordonnées sont nulles, c'est-à-dire dans $F(\vec{p})$. En particulier, $\vec{q}_{(n)}$ appartient à $F(\vec{p})$ à partir d'un certain rang, et il en sera de même pour la limite $\vec{q}$.

Ou bien (1) il y a des indices $k \geqslant r + 1$ (par exemple les s derniers) et une infinité de termes $\vec{p}_n$ tels que $p_{kn} = 0$ pour $k \geqslant \ell - s + 1$ et $p_{kn} \neq 0$ pour $r \leqslant \ell - s$, Ils constituent alors une sous-suite $\vec{p}_{(n)}$ telle que $F(\vec{p}_{(n)})$soit l'ensemble des points de $\overline{\Pi}$ dont les $\ell - s$ premières coordonnées sont nulles. Comme $k \leqslant \ell - s$. cet ensemble est contenu dans $F(\vec{p})$. Ainsi $\vec{q}_{(n)} \in F(\vec{p})$, et en passant à la limite on obtient $\vec{q} \in F(\vec{p})$.

On est donc dans les conditions d'application du théorème de Kakutani, et la correspondance F possède bien un point fixe.

(1) Ces deux cas ne s'excluent pas mutuellement.

Terminons par quelques remarques sur les hypothèses du théorème 10. L'hypothèse que ω_k^i soit non nul quels que soient i ou k pourrait être affaiblie. Elle sert à s'assurer que l'excès de demande tende vers l'infini au bord du simplexe de prix, c'est-à-dire que les consommateurs puissent effectivement bénéficier de la chute des prix. Si par exemple l'agent *i* était démuni de tout, $\vec{\omega}^i = \vec{0}$, on aurait beau faire tendre vers zéro le prix du bien *k*, en prenant une suite $\vec{p}_n$ de Π telle que $p_{nk} \to 0$, sa demande de bien *k* restera nulle ! C'est que son revenu $r^i = < \vec{p}_n, \vec{\omega}^i >$ reste nul, et son ensemble de budget B (r^i) réduit à $\vec{0} \in \mathbb{R}_+^l$. Ainsi Nils Holgersson aurait-il pu acheter toute une ville pour une monnaie de cuivre ; comme il n'avait rien sur lui ce jour-là, il ne put en profiter, et la ville engloutie et son peuple de commerçants disparurent expier leur péché une année de plus.

Dans le théorème 10, comme d'ailleurs dans le théorème de Kakutani, les hypothèses de convexité sont essentielles. On pourra certes affaiblir quelque peu l'hypothèse (H3), en se passant notamment de l'exigence que la convexité soit stricte. Mais il est aisé de donner des exemples où les relations de préférence sont monotones mais non convexes, et où il n'existe pas de systèmes de prix d'équilibre.

3. Les allocations d'équilibre

Dans le paragraphe précédent, nous avons examiné sous quelles conditions existaient des prix d'équilibres. Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés des allocations d'équilibre ainsi définies. Nous les avons déjà étudiées en partie au paragraphe II.4, où nous avions appelé $\mathcal{W}$, en l'honneur de Walras, l'ensemble des allocations d'équilibre. Il est facile de redémontrer dans le présent contexte les résultats que nous avions obtenus alors :

PROPOSITION 1

Toute allocation d'équilibre appartient au noyau flou de l'économie.

DEMONSTRATION

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ l'allocation associée aux prix d'équilibre $(p_1, \ldots, p_l)$. Supposons qu'il existe une coalition floue $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de support A, bloquant cette allocation ; on peut donc trouver des paniers de bien $\vec{y}^i$, $i \in A$, tels que :

$$\sum_{i \in A} \alpha_i \vec{y}^i = \sum_{i \in A} \alpha_i \vec{\omega}^i \tag{1}$$

$$\forall i \in A, \vec{y}^i \succ_i \vec{x}^i. \tag{2}$$

Appliquons la proposition 2.2. La relation (2) et la formule 2.2 (c) impliquent que $\vec{y}^i$ doit coûter plus cher que $\vec{x}^i$:

$$\forall i \in A, \ < \vec{p}, \vec{y}^i > \ > \ < \vec{p}, \vec{\omega}^i >.$$

En multipliant par α_i, non nul pour $i \in A$, chacune de ces inégalités, et en ajoutant, on obtient :

$$< \vec{p}, \sum_{i \in A} \alpha_i \vec{y}_i > \ > \ < \vec{p}, \sum_{i \in A} \alpha_i \vec{\omega}^i >$$

en contradiction formelle avec l'équation (1). D'où le résultat.

PROPOSITION 2

Toute allocation d'équilibre est un optimum de Pareto strict, unanimement préféré à l'allocation initiale :

$$\forall i \in S, \ \vec{x}^i \succsim_i \vec{\omega}^i. \tag{5}$$

DEMONSTRATION

Soit encore $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ l'allocation d'équilibre associée aux prix d'équilibre $(p_1, \ldots, p_l)$. Supposons qu'il existe une allocation $(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$ vérifiant :

$$\forall i \in S, \ \vec{y}^i \succsim \vec{x}^i \tag{3}$$

$$\exists \ j \in S : \vec{y}^j \succ \vec{x}^j. \tag{4}$$

Là encore, on a $< \vec{p}, \vec{y}^j > \ > \ < \vec{p}, \vec{\omega}^j >$.
On ne saurait avoir $< \vec{p}, \vec{y}^i > \ < \ < \vec{p}, \vec{\omega}^i >$, sans quoi on pourrait trouver $t > 1$ tel que l'inégalité subsiste : $< \vec{p}, t\, \vec{y}^i > \ < \ < \vec{p}, \vec{\omega}^i >$; on aurait alors $\vec{x}^i \succsim_i t\, \vec{y}^i$ d'après 2.2. (c), et $t\, \vec{y}^i \succ_i \vec{y}^i$ par monotonie et stricte convexité des préférences, donc $\vec{x}^i \succ_i \vec{y}^i$, en contradiction avec (3). Donc $< \vec{p}, \vec{y}^i > \ \geqslant \ < \vec{p}, \vec{\omega}^i >$

pour tout i avec inégalité stricte pour i = j. En ajoutant toutes ces inégalités, on obtient :

$$<\vec{p}, \sum_{i=1}^{m} \vec{y}^i - \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i> > 0.$$

Donc l'allocation $(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$ ne saurait être réalisable. On a ainsi montré que $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est un optimum de Pareto strict.

La formule (5) découle de la propriété 2.2. (c) des allocations d'équilibre, en y prenant $\vec{y} = \vec{\omega}^i$. En tenant compte de la stricte convexité du préordre $\succsim_i$, on peut même préciser (5) en une alternative :

$$\forall i \in S, \ [\vec{x}^i = \vec{\omega}^i \text{ ou } \vec{x}^i \succ_i \vec{\omega}^i]. \tag{6}$$

Ces diverses inclusions se voient particulièrement bien dans le cas très simple où il n'y a que deux agents et deux biens : $m = \ell = 2$. C'est qu'on dispose alors d'une représentation géométrique, donnée par Francis Edgeworth dans un article célèbre de 1881. Il s'agit d'un diagramme, connu depuis sous le nom de *boîte d'Edgeworth*, et que je vais construire.

Rassemblons d'abord les éléments. Il y a deux joueurs, dotés chacun des ressources initiales $\vec{\omega}^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1)$ et $\vec{\omega}^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2)$. Les ressources totales sont donc $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2)$ avec :

$$\Omega_1 = \omega_1^1 + \omega_1^2 \tag{7}$$

$$\Omega_2 = \omega_2^1 + \omega_2^2.$$

Une allocation est un couple $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$ de $\mathbb{R}_+^2$. Elle sera réalisable si et seulement si $\vec{x}^1 + \vec{x}^2 = \vec{\Omega}$, c'est-à-dire si :

$$\Omega_1 = x_1^1 + x_1^2. \tag{8}$$

$$\Omega_2 = x_2^1 + x_2^2.$$

En principe, il faudrait deux points dans $\mathbb{R}_+^2$, ou un point dans $\mathbb{R}_+^4$, pour représenter une allocation. Mais si elle est réalisable, on dispose de deux équations (8), qui ramènent à deux le nombre de coordonnées indépendantes, donc le nombre de dimensions. L'astuce d'Edgeworth consiste à traduire graphiquement cette remarque. Considérons dans le plan le rectangle O A Ω B, de sommets :

$$O = (O, O),\ \Omega = (\Omega_1, \Omega_2) \tag{9}$$
$$A = (O, \Omega_2),\ B = (\Omega_1, O).$$

Un point quelconque M de ce rectangle définit par ses coordonnées (m_1, m_2), un panier de biens pour le joueur 1 :

$$x_1^1 = m_1,\ x_2^1 = m_2.$$

Mais il définit aussi un panier de biens pour le joueur 2, par les formules :

$$x_1^2 = \Omega_1 - m_1,\ x_2^2 = \Omega_2 - m_2.$$

L'astuce consiste à remarquer que ces formules définissent les coordonnées du point M dans un nouveau système d'axes, d'origine Ω, portés respectivement par Ω A et Ω B.

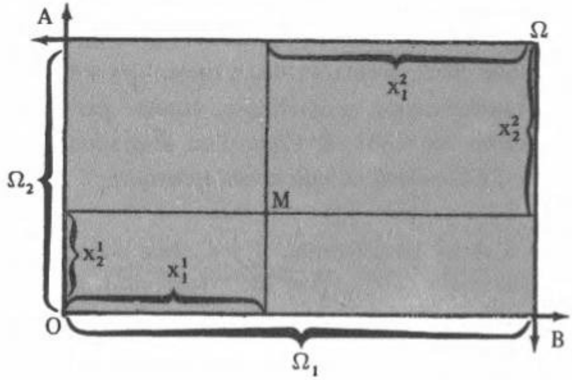


FIGURE III.10

La boîte d'Edgeworth : le premier système d'axes est $(\vec{OB}, \vec{OA})$ le second $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})$. Un seul point M suffit à représenter les allocations des deux agents.

La seule donnée du point M définit donc une allocation réalisable $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$: on obtient $\vec{x}^1$ en lisant les coordonnées de M dans les axes $(\vec{OB}, \vec{OA})$, et on obtient $\vec{x}^2$ en lisant les coordonnées de M dans les axes $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})$. A titre d'exemple, le point O correspond à l'allocation $(\vec{O}, \vec{\Omega})$ (tout au second joueur), et le point Ω à l'allocation $(\vec{\Omega}, \vec{O})$ (tout au premier). Le point A correspond à l'allocation $((O, \Omega_2), (\Omega_1, O))$ (tout le bien 2 au premier joueur, tout le bien 1 au second), et le point B à l'allocation $((\Omega_1, O), (O, \Omega_2))$ (tout le bien 1 au premier joueur, tout le bien 2 au second). L'allocation initiale $(\vec{\omega}^1, \vec{\omega}^2)$ sera représentée par un point C.

Sur le même diagramme, on peut porter les courbes d'indifférence de chacun des agents. Elles doivent, bien entendu, être lues dans les axes de coordonnées adéquats : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ pour l'agent 1, et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ pour l'agent 2. Ceci fait que les courbes d'indifférence du second paraissent renversées par rapport à celles du premier. D'après l'hypothèse (H3), le domaine délimité par une courbe d'indifférence et ne contenant pas l'origine est strictement convexe (1). Il s'agit de la région située au-dessus de la courbe pour le premier agent (origine O), et au-dessous pour le second (origine Ω). Les courbes du premier réseau paraissent donc convexes et celles du second concaves – à moins, bien sûr, de retourner le diagramme.

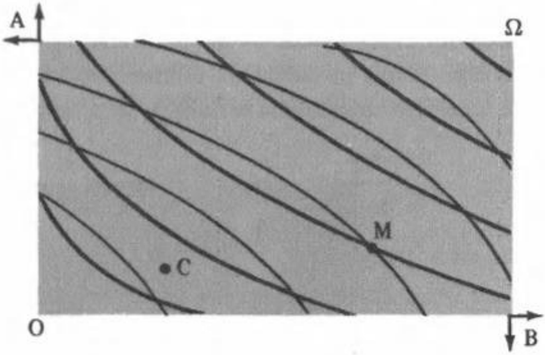


FIGURE III.11

La boîte d'Edgeworth : on a indiqué le point C représentant l'allocation initiale, et les deux réseaux de courbes d'indifférence.

Voici notre boîte d'Edgeworth construite. Nous allons pouvoir y chercher toutes ces allocations remarquables dont la théorie a prédit l'existence : optima de Pareto, éléments du noyau, allocations d'équilibre. L'observation fondamentale est que par tout point $M = (m_1, m_2)$ du rectangle $O\ A\ \Omega\ B$, il passe deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$, une pour chaque consommateur, qui délimitent chacune un ouvert strictement convexe du plan, $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$. De manière précise, on pose, compte tenu des formules (10) et (11) :

---

(1) Ceci fait jouer à la fois la monotonie et la stricte convexité des préférences.

$$\mathcal{C}^1 = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ (x_1, x_2) \sim_1 (m_1, m_2) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}^2 = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega_1 - x_1 \geqslant 0,\ \Omega_2, - x_2 \geqslant 0 \\ (\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \sim_2 (\Omega_1 - m_1, \Omega_2 - m_2) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{O}^1 = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \\ (x_1, x_2) \succ_1 (m_1, m_2) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{O}^2 = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega_1 - x_1 \geqslant 0,\ \Omega_2 - x_2 \geqslant 0 \\ (\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \succ_2 (\Omega_1 - m_1, \Omega_2 - m_2) \end{array} \right\}$$

On fera attention que les courbes d'indifférences (et les domaines convexes qu'elles délimitent) se prolongent hors de la boîte d'Edgeworth. Avec nos définitions, seuls les côtés gauche et inférieur arrêtent les courbes du premier réseau, et les côtés droit et supérieur arrêtent les courbes du second. Cette convention va nous être utile dans la définition de la tangence.

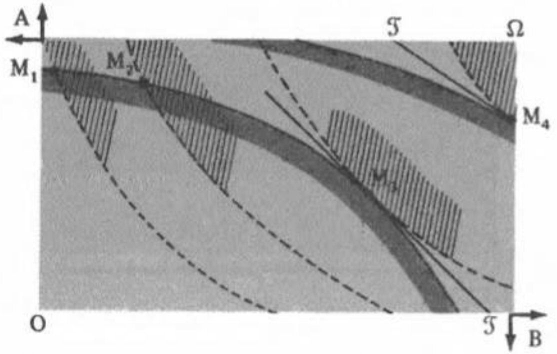


FIGURE III.12

En chaque point M de la boîte d'Edgeworth, il passe une courbe de chaque réseau. On a représenté les diverses situations possibles : tangence en M_3 et M_4, non-tangence en M_1 et M_2. Au voisinage de chacun d'eux, on a grisé l'ensemble $\mathcal{O}_2$ et hachuré l'ensemble $\mathcal{O}_1$.

On dira que les courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ sont *tangentes en M* s'il est possible de tracer une droite $\mathcal{T}$ passant par M et séparant $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$. En d'autres termes, les convexes ouverts $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$ sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{T}$, qui ne les rencontre ni l'un ni l'autre. La droite $\mathcal{T}$ sera appelée une *tangente commune à* $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$; cette définition n'exclut nullement qu'il y en ait plusieurs, comme lorsque $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ présentent un point anguleux en M.

Mais dans le cas où $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ sont différentiables, et où le point M est intérieur à la boîte O A Ω B, on retrouve la définition classique de la tangence de deux courbes, avec unicité de la tangente commune $\mathcal{T}$. En effet, la courbe $\mathcal{C}^1$ étant strictement convexe doit être partout (sauf en M) au-dessus de sa tangente $\mathcal{T}$. Et la courbe $\mathcal{C}^2$ étant strictement concave doit être partout (sauf en M) en dessous de sa tangente $\mathcal{T}$. Comme les domaines $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$ sont respectivement au-dessus de $\mathcal{C}^1$ et au-dessous de $\mathcal{C}^2$, ils sont bien séparés par $\mathcal{T}$.

Sur le bord de la boîte, la situation est toute différente, même si $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ sont différentiables. Si par exemple la première coordonnée m_1 est nulle, il faut tenir compte que $\mathcal{C}^1$ vient buter contre le côté gauche, ce qui ampute d'autant le domaine $\mathcal{O}^1$ et augmente les possibilités de séparation. A l'intérieur comme au bord, notre définition apparaît donc plus générale que la définition usuelle. Heureusement, on dispose d'une caractérisation simple, qui est la suivante :

PROPOSITION 3

Les courbes $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ *sont tangentes en M si et seulement si les ouverts* $\mathcal{O}^1$ *et* $\mathcal{O}^2$ *ne se rencontrent pas :*

$$\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2 = \phi. \tag{13}$$

DEMONSTRATION

Par définition, si les courbes $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ sont tangentes, $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$ sont de part et d'autre d'une droite $\mathcal{T}$ qui ne les rencontre pas, leur intersection est donc vide. Réciproquement, comme $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$ sont des convexes non vides, s'ils sont disjoints on peut leur appliquer le théorème de Minkowski. On peut donc trouver des coefficients (p_1, p_2) et un nombre r tels que :

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathcal{O}^1, \; p_1 n_1 + p_2 n_2 \geqslant r$$

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathcal{O}^2, \; p_1 n_1 + p_2 n_2 \leqslant r.$$

La droite $\mathcal{T}$ d'équation $p_1 n_1 + p_2 n_2 = r$ sépare donc $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$. Comme ils sont ouverts elle ne saurait les rencontrer. En effet, si par exemple un point $(n_1, n_2) \in \mathcal{O}^1$ vérifiait $p_1 n_1 + p_2 n_2 = r$, il y aurait toute une boule de centre (n_1, n_2) et de rayon $\epsilon > O$ contenue dans $\mathcal{O}^1$; mais cette boule rencontrerait aussi bien la région où $p_1 n_1 + p_2 n_2 \geqslant r$ (ce qui est normal) que la région où $p_1 n_1 + p_2 n_2 \leqslant r$ (ce qui est exclus). D'où le résultat. ———

En un point quelconque M, de coordonnées (m_1, m_2), appartenant au rectangle O A Ω B, on se trouve en présence de l'alternative suivante :

(i) ou bien les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ passant par M ne sont pas tangentes. D'après la proposition 3, il est alors possible de trouver un point N, de coordonnées (n_1, n_2), appartenant à $\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2$. Il est facile de vérifier que cette intersection est contenue dans le rectangle O A Ω B, puisque $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$ ne peuvent franchir un même côté. Donc M et N représentent des allocations réalisables $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$ et $(\vec{y}^1, \vec{y}^2)$, avec :

$$x_1^1 = m_1, x_2^1 = m_2, x_1^2 = \Omega_1 - m_1, x_2^2 = \Omega_2 - m_2$$

$$y_1^1 = n_1, y_2^1 = n_2, y_1^2 = \Omega_1 - n_1, y_2^2 = \Omega_2 - m_2.$$

En utilisant les formules (12), l'appartenance de N à $\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2$ se traduit par :

$$\vec{y}^1 \succ_1 \vec{x}^1 \text{ et } \vec{y}^2 \succeq_2 \vec{x}^2. \tag{14}$$

En d'autres termes, l'allocation $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$ n'est pas un optimum de Pareto faible.

(ii) ou bien les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ passant par M sont tangentes. D'après la proposition 3, l'ensemble $\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2$ est vide ; il n'est donc pas possible de trouver une allocation $(\vec{y}^1, \vec{y}^2)$ vérifiant la formule (14), où $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$ serait l'allocation représentée par M. Ainsi $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$ est un optimum de Pareto faible.

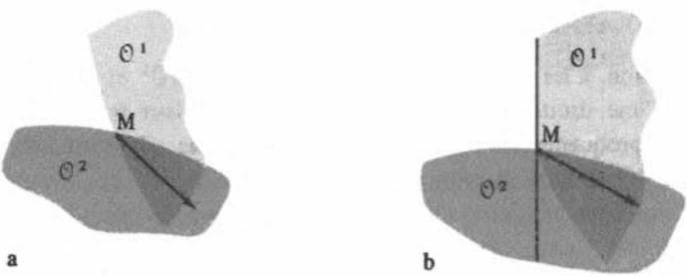


FIGURE III.13

On a représenté diverses situations de non-tangence. En **a**, non-tangence en un point M intérieur à la boîte d'Edgeworth, en **b** non-tangence sur le bord gauche. Dans les deux cas, un déplacement dans le sens de la flèche améliore la situation des deux agents simultanément.

---

(1) Formules (12).

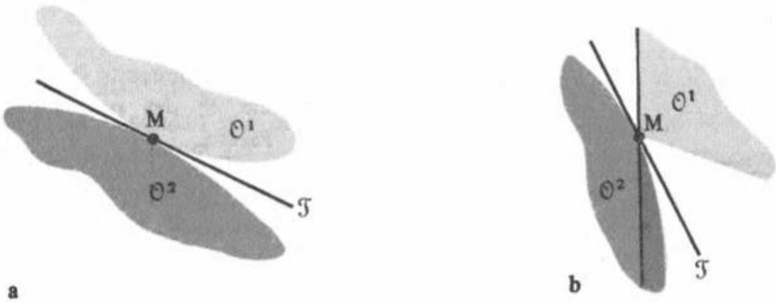


FIGURE III.14

On a représenté diverses situations de tangence, en **a** à l'intérieur, en **b** sur le bord gauche de la boîte d'Edgeworth. Dans les deux cas, le point M représente un optimum de Pareto.

En affinant quelque peu ce raisonnement, on peut montrer que l'allocation $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$ est un optimum de Pareto strict. Cela revient à montrer que $\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{O}^2$ et $\mathcal{C}^2 \cap \mathcal{O}^1$ sont vides. Or les hypothèses (H3) impliquent que $\mathcal{C}^1$ est la frontière de $\mathcal{O}^1$, c'est-à-dire que toute boule centrée en un point de $\mathcal{C}^1$ rencontre $\mathcal{O}^1$. Si donc $\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{O}^2$ contenait un point L, ce point serait le centre d'une petite boule contenue dans $\mathcal{O}^2$ (puisque c'est un ouvert) et rencontrant $\mathcal{O}^1$ (puisque sa frontière est $\mathcal{C}^1$). Donc $\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{O}^2$ serait non vide, contrairement à ce que nous venons de voir. On raisonne de même pour montrer que $\mathcal{C}^2 \cap \mathcal{O}^1$ est vide.

Finalement, on arrive au résultat suivant :

PROPOSITION 4

Une condition nécessaire et suffisante pour que le point M de la boîte d'Edgeworth représente un optimum de Pareto (faible ou strict) est que les deux courbes d'indifférence passant par M soient tangentes.

La boîte d'Edgeworth, c'est-à-dire le rectangle O A Ω B, représente toutes les allocations réalisables. Parmi elles, les optima de Pareto sont représentés par les points de tangence des deux systèmes de courbes d'indifférence. Même si ces courbes sont différentiables, il faut tenir compte de notre définition particulière de la tangence, qui diffère de la définition usuelle sur le bord du rectangle. A l'intérieur, celle-ci donne lieu à un arc de courbe continu O′ Ω'. Sur le bord, celle-là rajoute deux segments O O′ et $\Omega\,\Omega'$. Au total, on obtient

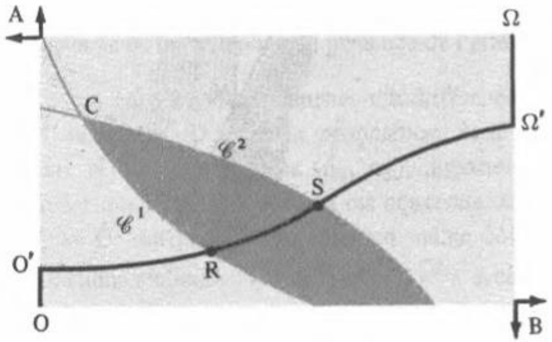


FIGURE III.15

On a représenté l'ensemble $\mathcal{P}$ des optima de Pareto.
(courbe $OO'RS\Omega'\Omega$), et le noyau $\mathfrak{N}$ (segment RS).

donc une courbe continue qui joint les points O et Ω en suivant un côté de la boîte, puis en s'élançant à l'intérieur pour rallier un autre côté, qu'elle suit jusqu'à l'arrivée. Nous savions à priori, en raison de la monotonie des préférences, que les points O (tout à l'agent 2) et Ω (tout à l'agent 1) représentaient des optima de Pareto, et faisaient donc partie de la courbe représentative de $\mathcal{P}$.

Dans une situation à deux agents telle que celle-ci, le noyau $\mathfrak{N}$ est extrêmement facile à caractériser. La partie vide mise à part, les seules coalitions possibles sont $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{1, 2\}$: dans ce cas très particulier, il n'y a pas de coalitions intermédiaires entre les individus et la collectivité. Les éléments du noyau sont donc les optima de Pareto faibles $(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$ qui vérifient la condition de rationalité individuelle :

$$\vec{x}^1 \succsim_1 \vec{\omega}^1 \text{ et } \vec{x}^2 \succsim \vec{\omega}^2. \tag{15}$$

Soit M, de coordonnées (m_1, m_2), le point représentatif de $(\vec{x}^1, \vec{x}^2) \in \mathfrak{N}$. Il se trouve sur la courbe représentative de $\mathcal{P}$. Les conditions de rationalité individuelle (15) permettent de le situer par rapport au point C représentant l'allocation initiale $(\vec{\omega}^1, \vec{\omega}^2)$. Il faut prendre les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ passant par C : le point M doit être au-dessus de la première et en dessous de la seconde. D'où le résultat :

PROPOSITION 5

Dans la boîte d'Edgeworth, le noyau est représenté par l'ensemble des points associés à $\mathcal{P}$ et compris entre les deux courbes d'indifférence passant par C.

En d'autres termes, les courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ issues de C découpent sur la courbe O Ω représentant $\mathcal{P}$ un arc R S représentant $\mathcal{N}$. On remarque que la construction de l'arc R S fait intervenir le point C, alors que la courbe O Ω ne dépendait que des deux réseaux de courbe d'indifférence. Effectivement, l'ensemble $\mathcal{P}$ des optima de Pareto ne dépend que des ressources totales, alors que le noyau $\mathcal{N}$ fait intervenir leur répartition initiale. Il en est de même de l'ensemble $\mathcal{W}$ des allocations d'équilibre, que je vais caractériser à présent :

PROPOSITION 6

Un point M de la boîte d'Edgeworth représente une allocation d'équilibre si et seulement si les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ issues de M ont en ce point une tangente commune qui passe par C.

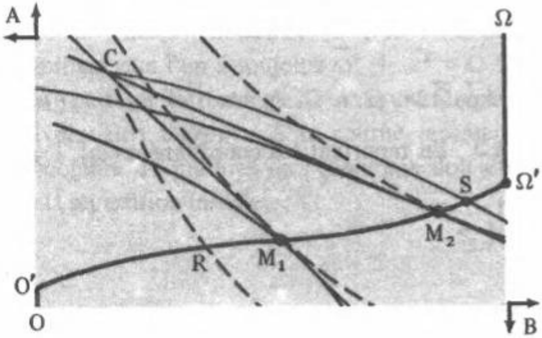


FIGURE III.16

Il y a deux allocations d'équilibre dans ce diagramme, représentées par les points M_1 et M_2 où la tangente commune passe par C. On remarquera qu'ils appartiennent au segment RS, qui représente le noyau.

DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{T}$ une tangente commune à $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ en M ; par définition, elle sépare $\mathcal{O}^1$ et $\mathcal{O}^2$. Il existe donc des coefficients (p_1, p_2) et un nombre r tels que :

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathcal{O}^1, \; p_1 n_1 + p_2 n_2 > r \quad (16)$$

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathcal{T}, \; p_1 n_1 + p_2 n_2 = r \quad (17)$$

$$\forall (n_1, n_2) \in \mathcal{O}^2, \; p_1 n_1 + p_2 n_2 < r. \quad (18)$$

Je dis que p_1 et p_2 sont strictement positifs. Prenons en effet $\epsilon > 0$ quelconque, et considérons le point de coordonnées $(m_1 + \epsilon, m_2)$. Comme le préordre $\succsim_1$ est monotone et strictement convexe, ce point tombera dans $\mathcal{O}^1$.

On aura donc :

$$p_1 (m_1 + \epsilon) + p_2 m_2 > r,$$

soit $p_1 \ \epsilon > 0$, en tenant compte de la formule (17). On obtient ainsi $p_1 > 0$, puis de la même manière $p_2 > 0$. En divisant p_1, p_2 et r par $p_1 + p_2$, on peut se ramener au cas où $p_1 + p_2 = 1$.

Pour l'individu 1, les points M et N de coordonnées (m_1, m_2) et (n_1, n_2) représentent les paniers de biens $\vec{x}^1 = (m_1, m_2)$ et $\vec{y}^1 = (n_1, n_2)$. Les formules (16) se traduisent par :

$$\vec{y}^1 \succ_1 \vec{x}^1 \Rightarrow \langle \vec{p}, \vec{y}^1 \rangle > r. \tag{19}$$

Pour l'individu 2, les points M et N représentent les paniers de biens $\vec{x}^2 = (\Omega_1 - m_1, \Omega_2 - m_2)$ et $\vec{y}^2 = (\Omega_1 - n_1, \Omega_2 - n_2)$. Les formules (17) se traduisent par :

$$\vec{y}^2 \succ_2 \vec{x}^2 \Rightarrow \langle \vec{p}, \vec{y}^2 \rangle > \langle \vec{p}, \vec{\Omega} \rangle - r. \tag{20}$$

On sait que le point C appartient à $\mathfrak{T}$. En reportant ses coordonnées (ω_1^1, ω_2^1) dans l'équation (16), on obtient

$$r = p_1 \ \omega_1^1 + p_2 \ \omega_2^1 = \langle \vec{p}, \vec{\omega}^1 \rangle$$

et puisque $\vec{\Omega} = \vec{\omega}^1 + \vec{\omega}^2$:

$$\langle \vec{p}, \vec{\Omega} \rangle - r = \langle \vec{p}, \vec{\omega}^2 \rangle.$$

En reportant ces expressions dans les formules (19) et (20), et en contraposant (c'est-à-dire en remplaçant l'expression $P \Rightarrow Q$ par l'expression logiquement équivalente non $Q \Rightarrow$ non P) on obtient le résultat désiré.

On obtiendra donc l'ensemble $\mathfrak{W}$ en menant de C les tangentes communes aux deux réseaux de courbes d'indifférence. Les points de contact représentent les allocations d'équilibre. La pente de la tangente commune donne le système de prix d'équilibre. En effet, si $p_1 \ n_1 + p_2 \ n_2 = r$ est l'équation de $\mathfrak{T}$, la pente sera $- p_1 / p_2$, ce qui, joint à $p_1 + p_2 = 1$, suffit à déterminer p_1 et p_2. Les inclusions $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}$ apparaissent immédiatement sur le diagramme : les points représentatifs de $\mathfrak{P}$ sont ceux où il y a une tangente commune à deux courbes d'indifférence, et les points représentatifs de $\mathfrak{W}$ sont ceux où la tangente commune passe par C.

Voici donc atteint le but que nous nous proposions : les inclusions fondamentales $\mathcal{W} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$ sont devenues des évidences graphiques. Mais la boîte d'Edgeworth a d'autres utilisations encore : on peut faire bouger le point C. La courbe représentative de $\mathcal{P}$ restera fixe, mais les points représentatifs de $\mathcal{W}$ se déplaceront sur elle. Le problème économique dont c'est la traduction graphique consiste à étudier les allocations d'équilibre comme fonctions de la répartition initiale, les ressources totales $\vec{\Omega}$ étant fixées. C'est un changement complet de point de vue. Jusqu'à présent, la répartition initiale était fixé ; maintenant, les ressources totales resteront fixées, mais nous ferons varier la répartition initiale.

La boîte d'Edgeworth montre que ce changement de point de vue est non seulement possible, mais nécessaire. En effet, elle montre que la réponse à certaines questions importantes dépend de la position du point C, c'est-à-dire de l'allocation initiale $(\vec{\omega}^1, \vec{\omega}^2)$ (la permanence de la boîte elle-même signifiant que l'on a toujours $\vec{\omega}^1 + \vec{\omega}^2 = \vec{\Omega}$ fixé). Par exemple, il est clair qu'on peut partager le rectangle O A Ω B en régions, suivant qu'on peut mener une ou plusieurs tangentes à la courbe représentative de $\mathcal{P}$. Cela veut dire que le nombre d'équilibres de l'économie doit être considéré comme une fonction de la répartition initiale.

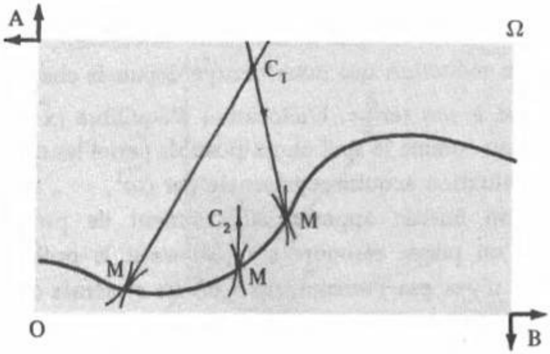


FIGURE III.17

La question de l'unicité : on a représenté l'ensemble $\mathcal{P}$ et, pour un point M décrivant $\mathcal{P}$, la tangente commune aux deux courbes d'indifférence passant par $\mathcal{P}$. Si C est assez voisin de $\mathcal{P}$ (position C_2), une seule de ces droites passe par C ; si C est assez éloigné de $\mathcal{P}$ (position C_1), il peut en passer plusieurs.

La question de l'unicité est particulièrement intéressante, et nous l'avions posée dès le chapitre précédent. On peut même y apporter quelques éléments de réponse. Si deux courbes d'indifférence sont différentiables (pas de point anguleux), elles ne peuvent avoir qu'une seule tangente commune à la fois (même au bord). Ainsi, si le point C se trouve sur la courbe représentative de $\mathcal{P}$, ou même à son voisinage immédiat, on ne pourra mener qu'une tangente commune passant par C. Il semble donc que, moyennant quelques hypothèses de différentiabilité, chaque répartition initiale suffisamment voisine d'un optimum de Pareto donne lieu à une allocation d'équilibre unique. C'est sur cette piste que nous allons nous engager maintenant.

4. Unicité des équilibres

Considérons une économie de propriété privée, vérifiant les hypothèses (H1), (H2), (H3). Les ressources totales $\vec{\Omega} \in \mathbb{R}^l_+$ sont initialement réparties entre les divers consommateurs, le panier de biens $\vec{\omega}^i \in \mathbb{R}^l_+$ à l'agent i. D'après les résultats du paragraphe 2, nous savons que si les $\vec{\omega}^i$ appartiennent à l'intérieur de $\mathbb{R}^l_+$, il existera au moins un système de prix d'équilibre $\vec{p} \in \Pi$. Le problème est maintenant de savoir combien il y en a exactement. Le cas où il n'y en a qu'un est particulièrement intéressant, car cela signifie que le processus de réduction qui nous occupe depuis le chapitre I, de $\mathcal{P}$ à $\mathfrak{N}$ puis à $\mathcal{W}$, est arrivé à son terme. L'allocation d'équilibre $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ associée à $\vec{p}$ apparaît donc comme le seul choix possible parmi les optima de Pareto, compte tenu de la situation acquise représentée par $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^n)$. En d'autres termes, la répartition initiale apporte suffisamment de précisions supplémentaires pour que l'on puisse résoudre complètement le problème du partage. Dans le cas où il n'y a pas l'unicité, mais où les systèmes de prix d'équilibre possibles sont en nombre fini, il subsiste une certaine ambiguïté. A chacun d'eux est associé une allocation d'équilibre, et de nouveau on n'a pas de critère rationnel pour se déterminer entre elles. Cette ambiguïté est d'autant plus grande que le nombre de systèmes de prix d'équilibre possibles est plus élevé. En tout état de cause, une sélection très sévère aura été opérée dans l'infinité informe des optima de Pareto. Enfin, s'il y a une infinité de systèmes de prix d'équilibre, on retombe dans l'indétermination qui concluait le chapitre I.

Ce que nous a montré la boîte d'Edgeworth, c'est que, à ressources totales $\vec{\Omega}$ fixées, le nombre de systèmes de prix d'équilibre dépend de la répartition initiale. C'est un point de vue différent de celui qui a été le nôtre jusqu'ici, une idée nouvelle qu'il importe de préciser. A toute allocation $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$, vérifiant $\sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i = \vec{\Omega}$ et $\omega_k^i > 0$, la proposition II.2 associe un élément $(\vec{p}; \vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ de $\Pi \times (\mathbb{R}_+^l)^m$ vérifiant les conditions (a), (b), (c). Si on pouvait assurer qu'il y en a toujours un et un seul, on définirait ainsi une application de $(\mathring{\mathbb{R}}_+^l)^m$ dans $\Pi \times (\mathbb{R}_+^l)^m$. L'ennui, c'est qu'il peut y en avoir plus d'un ; tout ce qu'on sait pour l'instant (théorème 10), c'est qu'il y en a un au moins. On a donc affaire, non à une application, mais à une correspondance (à valeurs non vides). Comme c'est un objet difficile à manier, on préfère travailler avec son graphe, qui sera donc une partie de $(\mathring{\mathbb{R}}_+^l)^m \times \Pi \times (\mathbb{R}_+^l)^m$. Ceci nous conduit à la définition suivante :

DEFINITION 1

On appelle *équilibre* tout élément $\vec{e} = (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m; \vec{p}; \vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ de $(\mathring{\mathbb{R}}_+^l)^m \times \Pi \times (\mathbb{R}_+^l)^m$ vérifiant :

(a) $\quad \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i = \vec{\Omega} = \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i$

(b) $\quad \forall i \in S, \ \langle \vec{p}, \vec{x}^i \rangle = \langle \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle$

(c) $\quad \forall i \in S, \ [\vec{y} \in \mathbb{R}_+^l \text{ et } \langle \vec{p}, \vec{y} \rangle \leqslant \langle \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle] \Rightarrow \vec{x}^i \succsim \vec{y}.$

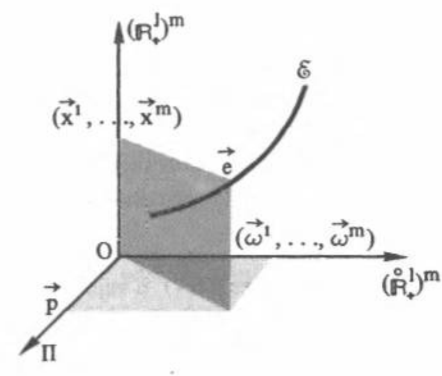


FIGURE III.18

Si le lecteur peut suppléer aux dimensions manquantes, ce dessin l'aidera à se représenter l'ensemble $\mathcal{E}$. Attention : le produit cartésien $(\mathbb{R}_+^l)^m \times (\mathring{\mathbb{R}}_+^l)^m \times \Pi$, représenté ici en dimension trois, est en réalité de dimension $2\,lm + l - 1$.

On notera $\mathcal{E} \subset (\mathring{\mathbb{R}}^l_+)^m \times \Pi \times (\mathbb{R}^l_+)^m$ l'ensemble des équilibres, et π : $\mathcal{E} \to (\mathring{\mathbb{R}}^l_+)^m$ la projection :

$$\pi(\vec{e}) = (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m). \tag{1}$$

Il peut y avoir plusieurs points $\vec{e} \in \mathcal{E}$ vérifiant cette équation. Economiquement, chacun d'eux correspond à un système de prix d'équilibre $\vec{p}$ et une allocation d'équilibre $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, pour une répartition initiale $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$ donnée. Géométriquement, ce sont des points de l'ensemble $\mathcal{E}$ se projetant en un même point de $(\mathring{\mathbb{R}}^l_+)^m$. Dans le diagramme cartésien $(\mathring{\mathbb{R}}^l_+)^m \times \Pi \times (\mathbb{R}^l_+)^m$, ce sont les points de $\mathcal{E}$ qui sont situés au-dessus de $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$.

Si ce point de base se déplace dans $(\mathring{\mathbb{R}}^l_+)^m$, les points du dessus bougeront aussi dans $\mathcal{E}$. Certains peuvent disparaître, d'autres apparaître, grâce au théorème 2.10 on est sûr qu'il en restera toujours au moins un. On a ainsi une traduction géométrique de la manière dont les prix des allocations d'équilibre dépendent de la répartition initiale. La question de l'unicité devient : quand n'y aura-t-il qu'un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ au-dessus d'un point donné $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$ de $(\mathring{\mathbb{R}}^l_+)^m$? On a même une partition naturelle de $(\mathring{\mathbb{R}}^l_+)^m$ en régions $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_\infty$, suivant le nombre de points de l'ensemble $\mathcal{E}$ qui se projettent en un point donné :

$$(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m) \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow \begin{cases} \text{il y a exactement } n \text{ points de } \mathcal{E} \\ \text{vérifiant : } \pi(\vec{e}) = (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m). \end{cases}$$

La question étant maintenant bien posée, il faut prendre les moyens d'y répondre. Pour cela, nous aurons besoin d'hypothèses et de méthodes appropriées. Ce ne sont pas celles que nous avons utilisées jusqu'ici, puisqu'il sera essentiellement question de différentiabilité. Cela nous permettra de regarder de plus près les fonctions de demande individuelles. A cette occasion, nous retrouverons les sentiers battus de la théorie néo-classique du consommateur.

Le dernier groupe d'hypothèses, (H4), à rajouter à (H1), (H2), (H3), se partage naturellement en deux :

- (H4 a) pour chaque $i \in S$, le préordre $\succsim_i$ est représentable par une fonction d'utilité u_i concave et deux fois continûment différentiable sur $\mathring{\mathbb{R}}^l_+$, et vérifiant $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\vec{x}) > 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+$ et tout $k \in \{1, \ldots, \ell\}$.

• (H4 b) pour tout $i \in S$ et tout $\vec{x} \in \mathring{\mathbb{R}}^l_+$, le déterminant suivant est non nul :

$$D(\vec{x}) = \begin{vmatrix} & & \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} & \\ & & \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdots & \frac{\partial u_i}{\partial x_l} & 0 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Indiquons d'abord que si les relations de préférence individuelles vérifient (H1), (H2), (H3), on peut les approcher d'aussi près que l'on veut par des préordres vérifiant (H4). Ceci montre bien le caractère purement technique des hypothèses (H4), qui sont donc dépourvues de toute interprétation économique. Les hypothèses (H4 a) et (H4 b) répondent à des besoins distincts, et nous en tirerons séparément les conséquences. Commençons par le premier groupe.

Les hypothèses (H4 a) sont essentiellement des hypothèses de différentiabilité. La condition $\partial u_i / \partial x^k > 0$ est très proche de l'hypothèse de monotonie qui avait été faite en (H3), sans être parfaitement équivalente. C'en est en quelque sorte la version « marginale » : à tout accroissement infinitésimal $d\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+$ du panier de biens $\vec{x} \in \mathbb{R}^l_+$ doit correspondre un accroissement infinitésimal de l'utilité u_i, d'après la formule :

$$d u_i (\vec{x}) = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\vec{x})\, d x_k,$$

où tous les termes sont strictement positifs. Nous allons maintenant appliquer ce type d'analyse, « marginale » pour les économistes, « infinitésimale » pour les mathématiciens, à l'étude des optima de Pareto.

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ un optimum de Pareto. Dans toute cette étude, je supposerai les $\vec{x}^i$ dans $\mathring{\mathbb{R}}^l_+$, c'est-à-dire les x^i_k strictement positifs ; ceci pour éviter les phénomènes de bord, qui nécessiteraient une étude à part. En d'autres termes, pour le cas $\ell = 2 = m$, je m'intéresse uniquement à ce qui se passe à l'intérieur de la boîte d'Edgeworth, sans me préoccuper de ses parois. D'après la proposition I.5.3, il existe une famille $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de coefficients positifs de somme un tels que l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ maximise la fonction $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$. Mais nous disposons maintenant de précisions supplémentaires : chaque fonction u_i est différentiable et ne dépend que de $\vec{x}^i$. En d'autres termes $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est solution du problème d'optimisation en *ml* variables :

$$\text{Max} \left\{ \alpha_1 u_1 (\vec{y}^1) + \ldots + \alpha_m u_m (\vec{y}^m) \right\}$$

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y_k^i \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant \ell \\ y_k^1 + \ldots + y_k^m = \Omega_k \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant \ell \end{cases}$$

que nous mettrons plutôt sous la forme suivante :

$$\text{Max} \left\{ \alpha_1 u_1 (y_1^1, \ldots, y_l^1) + \ldots + \alpha_m u_m (y_1^m, \ldots, y_l^m) \right\}$$

$$(\mathcal{P}') \quad \begin{cases} y_k^i \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant \ell \\ \Omega_k - y_k^1 - \ldots - y_k^m \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant \ell. \end{cases}$$

Les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont équivalents. Ils ne diffèrent que par les dernières contraintes ; or il est clair que l'optimum de $(\mathcal{P}')$ doit vérifier les contraintes de $(\mathcal{P})$. En effet, si on avait $\Omega_k - x_k^1 - \ldots - x_k^m = \epsilon > 0$ pour un certain k, on pourrait remplacer x_k^i par $x_k^i + \epsilon/m$, c'est-à-dire donner strictement plus de bien *k* à chaque consommateur *i*. D'après l'hypothèse (H3), l'allocation $(\vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^m)$ ainsi obtenue vérifierait $u_i (\vec{z}^i) > u_i (\vec{x}^i)$ pour chaque $i \in S$, et donc $\Sigma\, \alpha_i u_i (\vec{z}^i) > \Sigma\, \alpha_i u_i (\vec{x}^i)$, ce qui contredirait l'optimalité de $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$.

Pour des problèmes du type $(\mathcal{P}')$, on sait donner des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Elles associent à chaque liaison ou contrainte un coefficient, appelé *multiplicateur de Lagrange.* Ce coefficient est positif dans le cas d'une contrainte (écrite sous la forme $f(\vec{y}) \geqslant 0$), nul si cette contrainte n'est pas saturée à l'optimum (c'est-à-dire si $f(\vec{x}) > 0$). Dans le cas qui nous occupe, on a supposé $x_k^i > 0$, c'est-à-dire que les contraintes de positivité ne sont pas saturées à l'optimum. Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité s'écrivent donc de la manière suivante : il existe des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_l \geqslant 0$, tels que pour tout i et tout k on ait :

$$\frac{\partial}{\partial x_k^i} \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i (x_1^i, \ldots, x_l^i) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \left(\Omega_k - \sum_{i=1}^{m} x_k^i\right)\right] = 0.$$

Cela donne aussitôt :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k^i} (\vec{x}^i) = \lambda_k \tag{3}$$

ou, de manière plus parlante, en notant $u_i' (\vec{x}^i)$ le vecteur de composantes $\frac{\partial u_i}{\partial x_k^i} (\vec{x}^i)$ et $\vec{\lambda}$ le vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^l$:

$$\forall\, i \in S,\ u_i'(\vec{x}^i) = \vec{\lambda} / \alpha_i \qquad (^1).$$

Cette formule exprime en substance que tous les $u_i' (\vec{x}^i)$ sont colinéaires à un même vecteur $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}_+^l$. Grâce à l'hypothèse (H4 a), on peut même préciser que $\vec{\lambda}$ appartient à $\mathring{\mathbb{R}}_+^l$: la formule (3) nous donne en effet la composante λ_k comme somme de termes positifs dont l'un au moins est non nul. On peut donc introduire le vecteur $\vec{p} = \vec{\lambda} \ / \ \Sigma\, \lambda_k$, qui appartiendra à Π, et vérifiera :

$$\forall\, i \in S,\ u_i'(\vec{x}^i) = \gamma_i\, \vec{p}, \text{ avec } \gamma_i = \frac{\Sigma\, \lambda_k}{\alpha_i} > 0. \tag{4}$$

Pour chaque agent $i \in S$, on a donc l'équation vectorielle $u_i' (\vec{x}^i) = \gamma_i\, \vec{p}$. Mais celle-ci exprime que $\vec{x}^i$ est solution optimale, et γ_i multiplicateur de Lagrange, du problème d'optimisation en ℓ variables :

$$(\mathcal{P}_i) \quad \begin{array}{l} \operatorname{Max} u_i(\vec{y}) \\ \begin{cases} y_k \geqslant 0 \\ <\vec{p}, \vec{y}> \leqslant r^i \end{cases} \end{array}$$

où le nombre r^i est donné par :

$$<\vec{p}, \vec{x}^i> = r^i. \tag{5}$$

En effet, une fois de plus grâce à l'hypothèse (H3), la dernière contrainte doit être saturée à l'optimum. Comme les contraintes de positivité ne le sont pas ($x_k^i > 0$ par hypothèse), les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité nous donnent exactement l'équation cherchée.

D'un point de vue mathématique, le problème $(\mathcal{P})$ de dimension $m\ell$ a été décomposé en m problèmes $(\mathcal{P}_i)$ de dimension ℓ. Une fois connu $\vec{p}$, les pro-

---

(1) $\forall\ i \in S,\ \alpha_i \neq 0$. En effet, si l'on fait $\alpha_i = 0$ dans le problème $(\mathcal{P})$, on ne tient plus compte des préférences de l'agent *i*, ce sont donc les autres qui se partageront $\vec{\Omega}$ en vertu de la stricte monotonie de leurs préordres, et on arrivera à $\vec{x}^i = \vec{0}$ contrairement à l'hypothèse $x_k^i \neq 0$.

blèmes $(\mathcal{P}_i)$ sont indépendants les uns des autres. En particulier, l'équation $\sum_{i=1}^{m} \vec{y}^i = \vec{\Omega}$, pour que l'allocation soit réalisable, n'y figure plus ; toutefois, elle est satisfaite automatiquement à l'optimum ! C'est le bon choix de $\vec{p}$ dans Π qui assure ce petit miracle. On retrouve là ce que j'ai dit et ce que je redirai sur le rôle décentralisateur des prix en économie. Car les m problèmes $(\mathcal{P}_i)$ sont ceux dont la résolution fournit l'allocation d'équilibre associée au système de prix $\vec{p} \in \Pi$. Il suffit d'écrire que les $\vec{x}^i$ sont solutions de $(\mathcal{P}^i)$:

$$[y \in \mathbb{R}_+^l \text{ et } <\vec{p}, \vec{y}> \leqslant r^i] \Rightarrow u_i(\vec{x}^i) \geqslant u_i(\vec{y}^i),$$

de se rappeler l'équation

$$<\vec{p}, \vec{x}^i> = r^i \quad \forall\, i \in S \tag{5}$$

et de noter que l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ doit être réalisable (puisque c'est un optimum de Pareto) :

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i = \vec{\Omega},$$

pour retrouver les conditions (c), (b), (a) de la proposition 2.2 caractérisant les équilibres. Elles s'appliqueront à toute répartition initiale $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$ vérifiant :

$$<\vec{p}, \vec{\omega}^i> = r^i. \tag{6}$$

On a donc démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 2

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ un optimum de Pareto tel qu'aucun des x_k^i ne soit nul. Il existe un vecteur $\vec{p} \in \Pi$ et un seul proportionnel à tous les $u_i'(\vec{x}^i)$, pour $i \in S$:

$$\forall\, i \in S,\ \exists\, \gamma_i > 0 : u_i'(\vec{x}^i) = \gamma_i \vec{p}. \tag{4}$$

Pour toute répartition initiale $(\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_m)$ vérifiant :

$$\forall\, i \in S,\ <\vec{p}, \vec{\omega}^i> = <\vec{p}, \vec{x}^i>, \tag{7}$$

$\vec{e} = (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m; \vec{p}; \vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est un équilibre.

Ce résultat est avant tout une réciproque de la proposition 3.2. Celle-ci affirmait que toute allocation d'équilibre était un optimum de Pareto ; la proposition 4.2 montre que tout optimum de Pareto intérieur à $(\mathbb{R}_+^l)^m$ est une

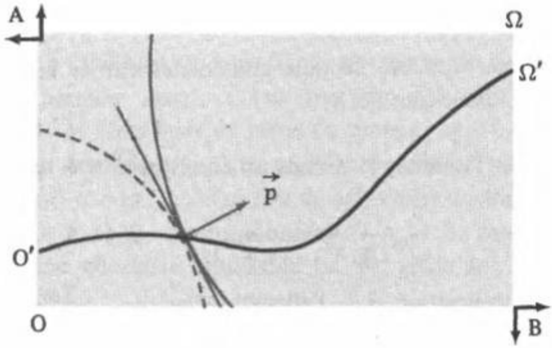


FIGURE III.19

Dans le cas particulier $l = m = 2$, nous savions déja qu'en tout optimum de Pareto intérieur à la boîte d'Edgeworth, les deux courbes d'indifférence sont tangentes (au sens classique). La proposition 2 est une extension de ce résultat à un nombre quelconque de biens et d'agents.

allocation d'équilibre, pour une répartition initiale convenablement choisie. Le système de prix associé est donné par les conditions (4). On en tire :

$$p_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j^i}(\vec{x}^i) / \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k^i}(\vec{x}^i), \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{8}$$

Malheureusement, ces formules ne peuvent pas servir au calcul effectif des prix d'équilibre, puisqu'elles nécessitent la connaissance préalable de l'allocation d'équilibre $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, alors que dans la pratique c'est la répartition initiale $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$ qui est connue. Une exception toutefois si $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) = (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$, c'est-à-dire dans le cas d'un équilibre *sans transactions.* On peut montrer que c'est un cas d'unicité.

PROPOSITION 3

Soit $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$ un optimum de Pareto, avec $\omega_k^i > 0$ pour tout i et tout k. On définit un système de prix $\vec{p} \in \Pi$ par la formule, valable pour tout $i \in S$:

$$\vec{p} = u_i'(\vec{\omega}^i) / \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k^i}(\vec{\omega}^i). \tag{9}$$

Alors $\vec{e} = (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m; \vec{p}; \vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$ est un équilibre, et c'est le seul qui soit compatible avec la répartition initiale $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$:

$$[\vec{e}' \in \mathfrak{E} \text{ et } \vec{e}' \neq \vec{e}] \Rightarrow \pi(\vec{e}') \neq (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m).$$

DEMONSTRATION

Que $\vec{e}$ soit un équilibre découle immédiatement de la proposition 2, où l'on prend $\vec{\omega}^i = \vec{x}^i$ pour tout $i \in S$.

Pour montrer l'unicité, je prends un équilibre $\vec{e}' \in \mathcal{E}$ associé à la même répartition initiale :

$$\vec{e}' = (\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m ; \vec{q} ; \vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m).$$

D'après la proposition 3.2, l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est unanimement préférée à $(\vec{\omega}^1, \ldots, \vec{\omega}^m)$. Comme cette dernière est un optimum de Pareto, c'est qu'elles coïncident : $\vec{\omega}^i = \vec{x}^i$ pour tout $i \in S$. De la caractérisation des équilibres (proposition 2.2 avec $\vec{\omega}^i = \vec{x}^i$) on déduit que $u_i' (\vec{\omega}^i) = \lambda_i \vec{q}$, où λ_i est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $< \vec{q}, \vec{y} > \leqslant < \vec{q}, \vec{\omega}^i >$. Donc $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont deux vecteurs proportionnels ; comme ils appartiennent tous deux à Π, cela implique qu'ils sont égaux.

Ainsi, si la répartition initiale est un optimum de Pareto, à $\omega_k^i > 0$, on peut en faire une allocation d'équilibre en choisissant les prix p_k donnés par les formules (9). C'est même le seul système de prix d'équilibre compatible avec la répartition initiale donnée. Chaque agent $i \in S$ se trouve alors dès le départ doté de ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut se payer : aucune transaction ne s'avère nécessaire. A chaque optimum de Pareto, intérieur à $(\mathbb{R}_+^l)^m$, la proposition 3 associe un équilibre sans transactions. Ce sont les cas d'unicité auxquels nous conduit l'hypothèse (H4 a).

Je me propose maintenant de montrer que l'unicité subsiste dans tout un ouvert contenant $\mathcal{P} \cap (\mathbb{R}_+^l)^m$. Cette extension du domaine d'unicité se fait par des méthodes géométriques qui nécessitent une meilleure connaissance de l'ensemble $\mathcal{E}$:

a) de sa structure locale ; c'est l'hypothèse (H4 b) qui nous la fournira ;

b) de sa structure globale ; elle ressort des propositions 2 et 3, plus particulièrement des relations (7), qui permettent de décrire $\mathcal{E}$ comme une réunion de « fibres » ou de « feuilles » linéaires.

Il sera beaucoup plus commode, et aussi instructif, d'exposer tout cela dans le cas particulier où $\ell = 2 = m$. Cela simplifie les calculs de déterminants, et permet d'utiliser la boîte d'Edgeworth. Pour simplifier un peu les notations, convenons de supprimer l'indice i = 1 ou 2, en notant u (au lieu de u_1) la fonction d'utilité du premier agent, v (au lieu de u_2) celle du second, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ (au lieu de $\vec{x}^1$) le panier de biens du premier agent, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ (au lieu de $\vec{x}^2$) celui du second, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ (au lieu de $\vec{\omega}^1$) les ressources initiales du premier agent, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ (au lieu de $\vec{\omega}^2$) celles du second. Chaque point M de la boîte O A Ω B, de coordonnées O A Ω B, de coordonnées (m_1, m_2), représente une allocation réalisable $(\vec{x}, \vec{y})$, grâce aux formules de passage :

$$\begin{cases} x_1 = m_1, & x_2 = m_2 \\ y_1 = \Omega_1 - m_1, & y_2 = \Omega_2 - m_2 \end{cases} \tag{10}$$

En particulier, le point C, de coordonnées (ω_1, ω_2), représente la répartition initiale $(\vec{\omega}, \vec{\alpha})$. On notera $u'(x_1, x_2)$ et $v'(y_1, y_2)$ les vecteurs :

$$u'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} u'_1(x_1, x_2) \\ u'_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$v'(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} v'_1(y_1, y_2) \\ v'_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, y_2) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y_2}(y_1, y_2) \end{bmatrix} \tag{12}$$

et on notera $u''(x_1, x_2)$ et $v''(y_1, y_2)$ les matrices :

$$u''(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} u''_{11}(x_1, x_2) & u''_{12}(x_1, x_2) \\ u''_{21}(x_1, x_2) & u''_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \, \partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \, \partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$v''(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} v''_{11}(y_1, y_2) & v''_{12}(y_1, y_2) \\ v''_{21}(y_1, y_2) & v''_{22}(y_1, y_2) \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y_1 \, \partial y_1}(y_1, y_2) & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y_1 \, \partial y_2}(y_1, y_2) \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y_2 \, \partial y_1}(y_1, y_2) & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y_2 \, \partial y_2}(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

D'après la proposition 2, on sait que, si $(\vec{x}, \vec{y})$ est un optimum de Pareto, les vecteurs $u'(x_1, x_2)$ et $v'(y_1, y_2)$ sont colinéaires. Il existe un vecteur $\vec{p} \in \Omega$, des coefficients $\gamma > 0$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\vec{p} = \frac{1}{\gamma} u'(x_1, x_2) = \frac{1}{\delta} v'(y_1, y_2). \tag{15}$$

D'après des résultats classiques sur les dérivées partielles secondes, nous savons que les matrices $u''(x_1, x_2)$ et $v''(y_1, y_2)$ sont symétriques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \, \partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \, \partial y_2}(y_1, y_2) &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_2 \, \partial y_1}(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{16}$$

et que les formes quadratiques associées sont semi-définies négatives :

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &\geq \langle \vec{\xi}, u''(x_1, x_2)\vec{\xi} \rangle = u''_{11}\, \xi_1^2 + 2\, u''_{12}\, \xi_1\, \xi_2 + u''_{22}\, \xi_2^2 \\ 0 &\geq \langle \vec{\eta}, v''(y_1, y_2)\vec{\eta} \rangle = v''_{11}\, \eta_1^2 + 2\, v''_{12}\, \eta_1\, \eta_2 + v''_{22}\, \eta_2^2 \end{aligned} \right. \tag{17}$$

quels que soient les vecteurs $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ et $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$. Les relations (16) et (17) proviennent uniquement de l'hypothèse (H4 a) : les premières traduisent la continuité des dérivées partielles secondes, les secondes expriment la concavité des fonctions u et v.

L'hypothèse (H4 b) permet de préciser les relations (17). Elle affirme que les matrices $u''(x_1, x_2)$ et $v''(y_1, y_2)$ sont inversibles ; on en déduit que les formes quadratiques associées sont définies négatives. En d'autres termes, quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ et $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$:

$$\left\{ \begin{aligned} &\langle \vec{\xi}, u''(x_1, x_2)\vec{\xi} \rangle < 0 \\ &\langle \vec{\eta}, v''(y_1, y_2)\vec{\eta} \rangle < 0. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

On montre aisément que les relations (18) impliquent que les fonctions u et v sont strictement concaves. L'hypothèse (H4 b) apparaît donc comme un renforcement de l'hypothèse de stricte convexité des préférences, qui apparaissait déjà dans (H3).

Ressortons maintenant notre petite boîte d'Edgeworth. Je noterai $\widetilde{\mathcal{P}}$ l'ensemble des points M intérieurs au rectangle O A Ω B qui représentent un optimum de Pareto. D'après le paragraphe précédent, M appartient à $\widetilde{\mathcal{P}}$ si et seulement si les deux courbes d'indifférence passant par M sont tangentes (au sens classique). Cette propriété va nous permettre de trouver l'équation de la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$. D'après la formule (10), il nous est loisible de noter (x_1, x_2) les coordonnées d'un point M intérieur au rectangle O A Ω B. L'équation d'une courbe d'indifférence s'écrit :

$$u(\xi_1, \xi_2) = u_0 \qquad (\mathcal{C}^1)$$

pour le premier réseau, et

$$v(\Omega_1 - \xi_1, \Omega_2 - \xi_2) = v_0 \qquad (\mathcal{C}^2)$$

pour le second. Pour qu'elles passent toutes deux par le point M, il faut prendre $u_0 = u(x_1, x_2)$ et $v_0 = v(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2)$. Leurs normales en ce point sont portées par les vecteurs $u'(x_1, x_2)$ et $-v'(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2)$ respectivement ; d'après l'hypothèse (H4 a), ils sont non nuls, et définissent bien une direction de droite. Dire que les courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ sont tangentes en M signifie qu'elles ont même normale en ce point, et donc que les vecteurs $u'(x_1, x_2)$ et $-v'(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2)$ sont proportionnels. D'où l'équation cherchée :

$$u'_1(x_1, x_2)\, v'_2(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) = u'_2(x_1, x_2)\, v'_1(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2). \qquad (19)$$

Jointe aux conditions $0 < x_1 < \Omega_1$ et $0 < x_2 < \Omega_2$, elle décrit complètement l'ensemble $\widetilde{\mathcal{P}}$. Comme on n'a qu'une équation pour deux variables, ce dernier est une courbe. L'hypothèse (H4 b) nous permet des conclusions plus précises :

PROPOSITION 4

L'ensemble $\widetilde{\mathcal{P}}$ est une courbe continûment différentiables. En un point $M \in \widetilde{\mathcal{P}}$, la tangente à la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$, et la tangente commune aux deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ passant par M, sont toujours distinctes.

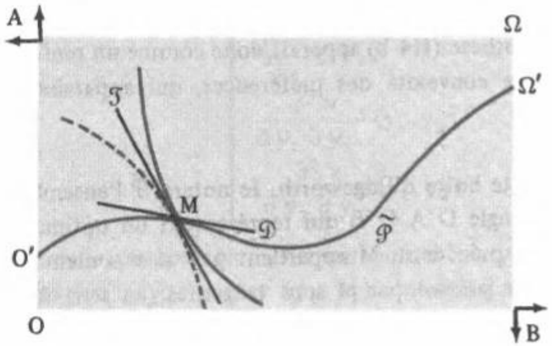


FIGURE III.20

En tout optimum de Pareto M, les tangentes 𝔗 aux courbes d'indifférence et 𝔇 à la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$ sont toujours distinctes.

DEMONSTRATION

Je commence par rappeler un résultat classique de géométrie analytique. Considérons dans le plan une courbe d'équation $f(x_1, x_2) = 0$. On suppose que le vecteur $f'(x_1, x_2)$, de composantes $\partial f / \partial x_1$ et $\partial f / \partial x_2$, est non nul en tout point de cette courbe. Alors celle-ci est autant de fois continûment différentiable que la fonction f elle-même, et le vecteur $f'(x_1, x_2)$ porte la normale à la courbe au point (x_1, x_2).

Nous l'avons déjà appliqué aux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$. Je l'applique maintenant à la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$, décrite par l'équation (19), c'est-à-dire que je prends :

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = {} & u'_1(x_1,x_2)\, v'_2(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \\ & - u'_2(x_1,x_2)\, v'_1(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = {} & u''_{11}(x_1,x_2)\, v'_2(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \\ & - u'_1(x_1,x_2)\, v''_{12}(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) - \\ & - u''_{12}(x_1,x_2)\, v'_1(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) + \\ & + u'_2(x_1,x_2)\, v''_{11}(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = {} & u''_{12}(x_1,x_2)\, v'_2(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \\ & - u'_1(x_1,x_2)\, v''_{22}(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) - \\ & - u''_{22}(x_1,x_2)\, v'_1(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) + \\ & + u'_2(x_1,x_2)\, v''_{12}(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \end{aligned} \tag{22}$$

Chaque fois que l'on dérive la fonction v, il s'introduit un changement de signe, car les variables x_1 et x_2 sont affectées du signe moins dans les expressions $\Omega_1 - x_1$ et $\Omega_2 - x_2$. En utilisant les notations matricielles (13) et (14), on écrira :

$$f'(x_1, x_2) = u''(x_1, x_2) \begin{bmatrix} v'_2(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \\ \\ -v'_1(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \end{bmatrix} \quad +$$

$$+ v''(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \begin{bmatrix} u'_2(x_1, x_2) \\ \\ -u'_1(x_1, x_2) \end{bmatrix} \tag{23}$$

Puisque M appartient à $\widetilde{\mathcal{P}}$, l'allocation $(\vec{x}, \vec{y})$, où $\vec{y} = \vec{\Omega} - \vec{x}$, est un optimum de Pareto. On peut donc appliquer les formules (15) : il existe $\vec{p} \in \Pi$, $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que :

$$u'(x_1, x_2) = \gamma \vec{p} \tag{24}$$

$$v'(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) = \delta \vec{p}. \tag{25}$$

En reportant dans la formule (23), on obtient :

$$f'(x_1, x_2) = K \vec{q} \tag{26}$$

où la matrice K et le vecteur $\vec{q}$ sont donnés par :

$$K = \gamma u''(x_1, x_2) + \delta v''(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \tag{27}$$

$$\vec{q} = (p_2, -p_1). \tag{28}$$

Il est facile de vérifier que la forme quadratique associée à la matrice K est définie négative. Il suffit d'écrire :

$$< \vec{\xi}, K \vec{\xi} > = \gamma < \vec{\xi}, u''(x_1, x_2) \vec{\xi} > + \delta < \vec{\xi}, v''(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2) \vec{\xi} >$$

ou les termes de droite sont strictement négatifs pourvu que $\vec{\xi}$ soit non nul. On en tire les deux conclusions annoncées.

En particulier, la matrice K est inversible. Comme $\vec{p} \in \Pi$, on a $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$. Le vecteur $\vec{q} = (-p_2, p_1)$ n'est pas nul. Son image par K ne saurait donc être nulle ; or c'est justement le vecteur $f'(x_1, x_2)$ (formule 26)). D'après les résultats que nous avons rappelés, cela veut dire que la courbe $\mathcal{P}$ est continûment différentiable (une fois au moins, comme f elle-même).

Le vecteur $f'(x_1, x_2)$ donne la direction de la normale à $\widetilde{\mathcal{P}}$ en M. D'après les formules (24) et (25), le vecteur $\vec{p}$ donne la direction de la normale commune à $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ en M. Si elles étaient confondues, les vecteurs $f'(x_1, x_2)$ et $\vec{p}$ seraient proportionnels, ce qui s'écrirait :

$$f'_1(x_1, x_2)\, p_2 - f'_2(x_1, x_2)\, p_1 = 0$$

soit encore, sous forme de produit scalaire avec le vecteur $\vec{q} = (p_2, -p_1)$:

$$<\vec{q}, f'(x_1, x_2)> = 0$$

et en faisant intervenir la formule (26) :

$$<\vec{q}, K\vec{q}> = 0.$$

Ceci contredirait le fait que la forme quadratique associée à la matrice K est définie négative. Les courbes $\widetilde{\mathcal{P}}$ d'une part, $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ d'autre part, n'ont pas la même normale en M. Elles ne sont donc pas tangentes en ce point, ce qui termine la démonstration.

Voici donc précisée, grâce à l'hypothèse (H4 b), la structure de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{P}}$. Dire que c'est une courbe continûment différentiable signifie que, quel que soit le point $M \in \widetilde{\mathcal{P}}$, de coordonnées (x_1, x_2), il existe un ouvert $\mathcal{U} \ni M$, un nombre $\epsilon > 0$ et deux fonctions continûment différentiables ξ_1 et ξ_2 de $]-\epsilon, \epsilon[$ dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$(\xi_1(0), \xi_2(0)) = (x_1, x_2) \tag{29}$$

$$(\xi'_1(0), \xi'_2(0)) \neq (0, 0) \tag{30}$$

$$\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{U} = \left\{ (\xi_1(t), \xi_2(t)) \mid t \in]-\epsilon, \epsilon[\right\}. \tag{31}$$

En d'autres termes, au voisinage du point M, la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$ admet la représentation paramétrique $t \to (\xi_1(t), \xi_2(t))$. Le vecteur $(\xi'_1(t), \xi'_2(t))$ donne bien entendu la direction de la tangente au point de paramètre t.

Il semble que nous nous soyons écarté de notre propos : l'étude des équilibres, particulièrement des cas d'unicité. Nous en sommes au contraire tout près. C'est qu'il suffit d'une coordonnée supplémentaire pour introduire les prix. Comme il n'y a que deux biens, et compte tenu de la relation $p_1 + p_2 = 1$, un système de prix $\vec{p} \in \Pi$ est défini par l'unique coordonnée $p_1 \in]0, 1[$. On va donc ajouter une troisième dimension à la boîte d'Edgeworth : ce qu'on obtient ainsi méritera bien mieux le nom de boîte. Je l'appellerai *boîte de*

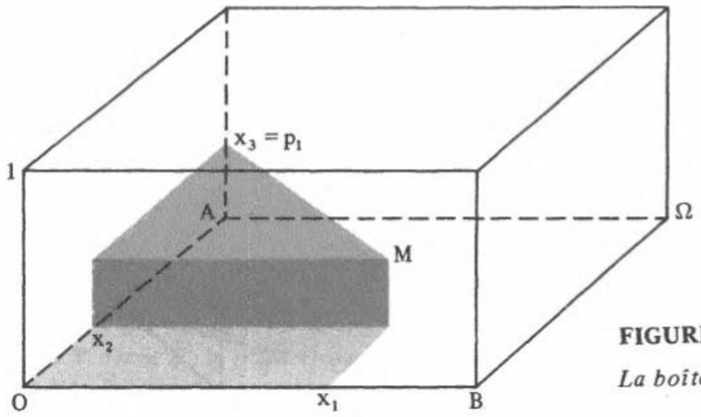


FIGURE III.21

La boîte de Balasko.

Balasko, du nom de l'auteur qui le premier [1976] a adopté ce point de vue pour étudier l'unicité. Il s'agit du parallélépipède de $\mathbb{R}^3$ défini par les conditions :

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \Omega_1, \; 0 \leqslant x_2 \leqslant \Omega_2, \; 0 \leqslant x_3 \leqslant 1. \tag{32}$$

En faisant $x_3 = 0$, on retrouve la boîte d'Edgeworth, qui constitue donc le plancher de la boîte de Balasko. Un point M, de coordonnées (x_1, x_2, x_3), représente une allocation $(\vec{x}, \vec{y})$ et un système de prix $\vec{p} \in \Pi$, grâce aux formules :

$$\begin{cases} y_1 = \Omega_1 - x_1, & y_2 = \Omega_2 - x_2 \\ p_1 = x_3, & p_2 = 1 - x_3 . \end{cases} \tag{33}$$

Dorénavant, nous noterons directement p_1 au lieu de x_3 la troisième coordonnée.

Là encore, on ne s'intéresse qu'à l'intérieur de la boîte. On notera $\mathfrak{S}$ (1) l'ensemble des points M représentant une répartition initiale et un système de prix d'équilibre compatible avec celle-ci. D'après le paragraphe précédent, la surface $\mathfrak{S}$ recouvre entièrement la boîte d'Edgeworth, et n'a qu'un point au-dessus de chaque point de $\mathcal{P}$. Mais on ne s'intéresse qu'à la portion $\tilde{\mathfrak{S}}$ de $\mathfrak{S}$ correspondant à $\tilde{\mathcal{P}}$. Plus précisément, un point $M \in \mathfrak{S}$ appartiendra à $\tilde{\mathfrak{S}}$ si la répartition initiale et l'allocation d'équilibre qu'il définit sont toutes deux intérieures

(1) Il y a là un léger abus de langage, cette notation ayant déjà servi pour un objet distinct, quoique analogue.

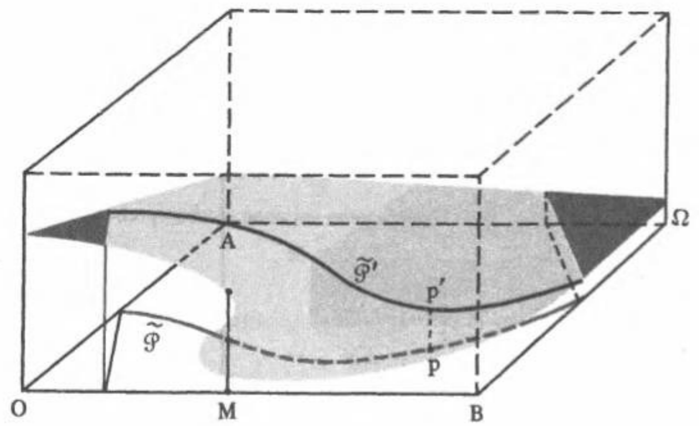


FIGURE III.22

La surface $\mathfrak{E}$. En grisé, on a représenté les parties à exclure pour obtenir $\widetilde{\mathfrak{E}}$. On a figuré la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$ et son relèvement $\widetilde{\mathcal{P}}'$. On remarquera que le point P n'a qu'un seul point de $\widetilde{\mathfrak{E}}$ au-dessus de lui, alors que le point M n'en a pas moins de trois.

à la boîte d'Edgeworth. La surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ ainsi obtenue recouvre toujours la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$, mais ne recouvre plus entièrement le rectangle O A Ω B. L'étude de la portion manquante, $\mathfrak{E} \setminus \widetilde{\mathfrak{E}}$, relève des « effets de bord », que nous n'étudions pas ici. Elle n'apporterait d'ailleurs rien de bien nouveau.

Soit M, de coordonnées $(\omega_1, \omega_2, p_1)$, un point de la boîte de Balasko. Dire que M appartient à $\mathfrak{E}$ signifie que $\vec{p} = (p_1, 1 - p_1)$ est un système de prix d'équilibre pour la répartition initiale $(\vec{\omega}, \vec{\alpha})$, où $\vec{\alpha} = \vec{\Omega} - \vec{\omega}$. On en déduit aussitôt l'allocation d'équilibre $(\vec{x}, \vec{y})$ en résolvant les problèmes d'optimisation $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$: le panier de biens $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$) maximise la fonction u (resp. v) sur $\mathbb{R}^1_+$, sous la contrainte $< \vec{p}, \vec{x} - \vec{\omega} > \leqslant 0$ (resp. $< \vec{p}, \vec{y} - \vec{\alpha} > \leqslant 0$). Dans le langage de la définition 1, il suffit de connaître $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ et $\vec{p}$, pour en déduire tout l'équilibre $(\vec{\omega}, \vec{\alpha}; \vec{p}; \vec{x}, \vec{y})$.

Dire que M appartient à $\widetilde{\mathfrak{E}}$ signifie que $\vec{\omega}, \vec{\alpha}, \vec{x}, \vec{y}$ appartiennent tous à $\mathring{\mathbb{R}}^2_+$. Notons C et P les points de la boîte d'Edgeworth de coordonnées (ω_1, ω_2) et (x_1, x_2) ; le point C n'est autre que la projection horizontale de M. Dire que M appartient à $\widetilde{\mathfrak{E}}$ signifie que C et P sont tous deux intérieurs à la boîte d'Edgeworth. Le paragraphe précédent nous apprend alors que le point P appartient à la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$; plus précisément, les deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ passant par P ont en ce point une tangente commune $\mathcal{T}$ passant par C.

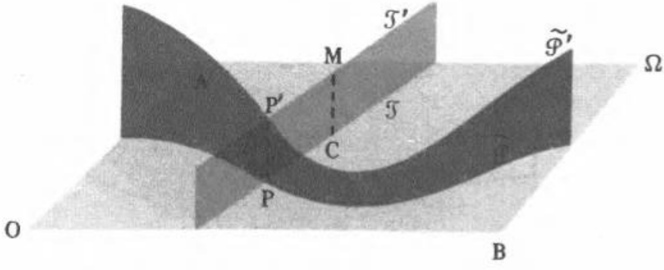


FIGURE III.23

Quand P décrit $\tilde{\mathfrak{P}}$, le point P′ décrit la courbe $\tilde{\mathfrak{P}}'$ et la droite $\mathfrak{T}'$ balaie la surface $\tilde{\mathfrak{S}}$.

Le système de prix $\vec{p}$ correspondant est donné par les relations (8). C'est le même pour tous les points de la droite $\mathfrak{T}$; il ne dépend que du point P. Ceci signifie que la droite $\mathfrak{T}$ du plan est la projection d'une droite horizontale $\mathfrak{T}'$ de l'espace, dont l'intersection avec la boîte de Balasko est entièrement contenue dans la surface $\tilde{\mathfrak{S}}$:

$$(x'_1, x'_2, p'_1) \in \mathfrak{T}' \Leftrightarrow [(x'_1, x'_2) \in \mathfrak{T} \quad \text{et} \quad p'_1 = p_1].$$

Récapitulons la situation. Pour tout point $P \in \tilde{\mathfrak{P}}$, il existe un unique point P′ de la surface $\tilde{\mathfrak{S}}$ se projetant en P. Quand le point P décrit la courbe $\tilde{\mathfrak{P}}$ de la boîte d'Edgeworth, le point P′ correspondant décrit une courbe $\tilde{\mathfrak{P}}'$ de la boîte de Balasko. Avec le point P varie la droite $\mathfrak{T}$, tangente commune aux deux courbes d'indifférence passant par P. La droite correspondante $\mathfrak{T}'$ de l'espace est obtenue en menant du point P′ la parallèle à $\mathfrak{T}$. Quand P′ décrit $\tilde{\mathfrak{P}}'$, la droite horizontale $\mathfrak{T}'$ engendre la surface $\tilde{\mathfrak{S}}$. Celle-ci est donc obtenue comme l'intersection avec la boîte de Balasko d'une famille de droites horizontales s'appuyant sur une courbe fixe $\tilde{\mathfrak{P}}'$. On dit que $\tilde{\mathfrak{S}}$ est une surface *réglée*, que la courbe $\tilde{\mathfrak{P}}'$ est son *arête*, et que les droites $\mathfrak{T}'$ sont ses *génératrices*. C'est la traduction géométrique des relations (7). Tout ceci va nous permettre de donner de l'ensemble $\tilde{\mathfrak{S}}$ une représentation paramétrique, et de vérifier que c'est bien une surface régulière.

PROPOSITION 5

L'ensemble $\tilde{\mathfrak{S}}$ est une surface continûment différentiable de la boîte de Balasko. Le long de son arête $\tilde{\mathfrak{P}}'$, le plan tangent n'est jamais vertical. Le long de chaque génératrice, le plan tangent n'est vertical qu'en un point au plus.

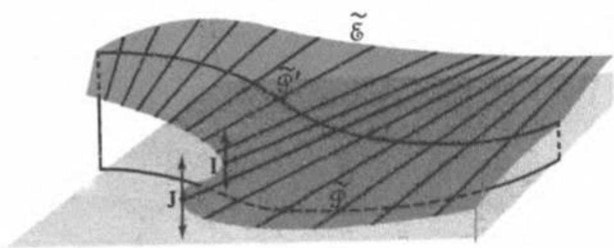


FIGURE III.24

On a représenté la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$ et les droites qui l'engendrent. En I et J le plan tangent est vertical : ceci ne peut se produire qu'une fois le long de chaque génératrice.

DEMONSTRATION

Soit, comme ci-dessus, M un point $\widetilde{\mathfrak{S}}$ représentant un équilibre $(\vec{\omega}, \vec{\alpha}; \vec{p}; \vec{x}, \vec{y})$. Je conserve les notations précédentes, c'est-à-dire que C désigne la projection de M, que $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$ est le point de coordonnées (x_1, x_2), et que $\mathfrak{T}$ est la droite joignant P à C. On peut donner de celle-ci une représentation paramétrique. En effet, on sait qu'elle passe par le point P, et on a vu au paragraphe précédent que sa pente est $-p_1 / p_2$. D'où :

$$\mathfrak{T} = \left\{ (x_1 + p_2 s, x_2 - p_1 s) \mid s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

On en déduit aussitôt une représentation paramétrique de la droite $\mathfrak{T}'$:

$$\mathfrak{T}' = \left\{ (x_1 + p_2 s, x_2 - p_1 s, p_1) \mid s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \qquad (34).$$

Pour obtenir une représentation paramétrique de la surface, il ne reste plus qu'à faire varier P dans $\widetilde{\mathcal{P}}$, c'est-à-dire (x_1, x_2). Justement, les formules (29) à (31) nous donnent une représentation paramétrique de $\widetilde{\mathcal{P}}$ au voisinage de (x_1, x_2). Encore faudra-t-il tenir compte du fait que le système de prix $\vec{p} \in \Pi$ dépend de P par l'intermédiaire des relations (8). On posera donc $x_1 = \xi_1(t)$, $x_2 = \xi_2(t)$, puis $p_1 = \pi_1(t)$, $p_2 = \pi_2(t)$, et on reportera dans la formule (34), ce qui donne :

$$b(\widetilde{\mathfrak{S}}) = \left\{ (\xi_1(t) + \pi_2(t)s, \xi_2(t) - \pi_1(t)s, \pi_1(t)) \;\middle|\; \begin{matrix} -\infty < s < \infty \\ -\epsilon < t < \epsilon \end{matrix} \right\} \qquad (35)$$

On décrit ainsi une bande de largeur 2 ϵ et de longueur infinie, dont l'intersection avec la boîte de Balasko est entièrement tracée sur la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$. Cette bande contient en particulier les points M (paramètres $s = \bar{s}$, $t = 0$) et P′ (paramètres $s = 0$, $t = 0$). On dispose ainsi d'une représentation paramétrique de la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$ au voisinage du point M. Les fonctions ξ_1 et ξ_2 sont celles que fournissent les formules (29) à (31), et les fonctions π_1 et π_2 sont données par les relations (8) :

$$\pi_1(t) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\xi_1(t), \xi_2(t))}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\xi_1(t), \xi_2(t)) + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(\xi_1(t), \xi_2(t))} \tag{36}$$

$$\pi_2(t) = 1 - \pi_1(t). \tag{37}$$

Comme la représentation paramétrique locale ne fait intervenir que deux variables indépendantes s et t, on a bien affaire à une surface. Dire que celle-ci est continûment différentiable signifie qu'elle est partout lisse, sans coins ni angles. Cela se vérifie en s'assurant que le plan tangent est partout bien défini. En dérivant par rapport à s, puis t, on obtient deux vecteurs tangents à la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$ au point M :

$$\vec{e}_s = (\pi_2(0), -\pi_1(0), 0) = \tag{38}$$

$$= (p_2, -p_1, 0)$$

$$\vec{e}_t = (\xi_1'(0) + \bar{s}\pi_2'(0), \xi_2'(0) - \bar{s}\pi_1'(0), \pi_1'(0)) \tag{39}$$

$$= (\xi_1'(0), \xi_2'(0), \pi_1'(0)) + \bar{s}(\pi_2'(0), -\pi_1'(0), 0)$$

Remarquons que le vecteur $\vec{e}_s$ est non nul et appartient à la boîte d'Edgeworth. C'est la direction de la tangente commune $\mathfrak{T}$ aux deux courbes d'indifférence $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ passant par P.

Pour que les vecteurs $\vec{e}_s$ et $\vec{e}_t$ définissent un plan, il faut et il suffit qu'ils ne soient pas colinéaires. S'ils l'étaient, on aurait $\vec{e}_s = \lambda\,\vec{e}_t$ pour un certain scalaire $\lambda \neq 0$. En comparant les dernières composantes, on en tirerait $\pi_1'(0) = 0$. En dérivant la relation (37), on obtient $\pi_2'(0) = -\pi_1'(0) = 0$. En reportant dans la formule (39), on obtiendrait finalement :

$$\vec{e}_t = (\xi_1'(0), \xi_2'(0), 0).$$

C'est-à-dire que le vecteur $\vec{e}_t$ serait tangent en P à la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$. La tangente en P à $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$, de direction $\vec{e}_s$, et la tangente en P à $\widetilde{\mathcal{P}}$, de direction $\vec{e}_t$, seraient donc confondues, en contradiction avec la proposition 4. Les vecteurs $\vec{e}_s$ et $\vec{e}_t$ ne peuvent donc pas être colinéaires. Ils définissent toujours un plan, qui est le plan tangent à la surface $\widetilde{\mathcal{E}}$ au point M. Celle-ci est donc continûment différentiable.

Dire que le plan tangent est vertical signifie que les projections horizontales des vecteurs $\vec{e}_s$ et $\vec{e}_t$ sont colinéaires. Il s'agit des vecteurs de la boîte d'Edgeworth :

$$\vec{f}_s = (p_2, -p_1)$$
$$\vec{f}_t = (\xi_1'(0), \xi_2'(0)) + s\,(\pi_2'(0), -\pi_1'(0)).$$

Au point P', où $s = 0$, le vecteur $\vec{f}_t$ se réduit à $(\xi_1'(0), \xi_2'(0))$: c'est un vecteur tangent en P à la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$. Nous venons de voir qu'il ne peut pas être colinéaire à $\vec{f}_s$, qui est un vecteur tangent en P aux courbes $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ (proposition 3). Le plan tangent en $P' \in \widetilde{\mathcal{P}}'$ n'est donc pas vertical.

Cherchons pour quelles valeurs de s les vecteurs $\vec{f}_s$ et $\vec{f}_t$ peuvent être colinéaires. Comme $(p_2, -p_1)$ et $(\xi_1'(0), \xi_2'(0))$ sont linéairement indépendants dans le plan, on peut trouver des scalaires λ_1 et λ_2, définis de manière unique, tels que :

$$(\pi_2'(0), -\pi_1'(0)) = \lambda_1 (p_2, -p_1) + \lambda_2 (\xi_1'(0), \xi_2'(0)).$$

On écrira la proportionnalité $\vec{f}_t = \mu \vec{f}_s$ en séparant les composantes suivant $(p_2, -p_1)$ et suivant $(\xi_1'(0), \xi_2'(0))$:

$$1 + s\lambda_2 = 0$$
$$s\lambda_1 = \mu,$$

soit $s = -1/\lambda_2$ et $\mu = s\lambda_1$, pourvu toutefois que λ_2 soit non nul, c'est-à-dire que $(\xi_1'(0), \xi_2'(0))$ et $(\pi_2'(0), -\pi_1'(0))$ ne soient pas colinéaires.
Bien entendu, les coefficients λ_1 et λ_2 ne dépendent que du point P. Sur la génératrice M P' il y a donc en général un point $H' \in b(\widetilde{\mathcal{E}})$, de paramètres $s = -1/\lambda_1$, $t = 0$, où le plan tangent à $b(\widetilde{\mathcal{E}})$ soit vertical. Pour que ce point soit bien sur la surface $\widetilde{\mathcal{E}}$, il faut encore qu'il appartienne à la boîte de Balasko. Si oui, on trouve un point $H' \in \widetilde{\mathcal{E}}$ de la génératrice $\mathcal{T}'$ où le plan tangent à $\widetilde{\mathcal{E}}$

est vertical. Si non il n'existe pas de tel point. En tout cas, il n'y en a pas plus d'un par génératrice.

Cette proposition est lourde de conséquences. Tout d'abord, elle permet de démontrer l'unicité sur tout un ouvert contenant $\widetilde{\mathcal{P}}$.

PROPOSITION 6

Tout optimum de Pareto $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathring{\mathbb{R}}^2_+)^2$ est le centre d'une boule ouverte non vide $\mathcal{B} \subset (\mathring{\mathbb{R}}^2_+)^2$ telle que, quelle que soit l'allocation réalisable $(\vec{\omega}, \vec{\alpha}) \in \mathcal{B}$, il existe un seul équilibre $\vec{e}$ compatible avec celle-ci.

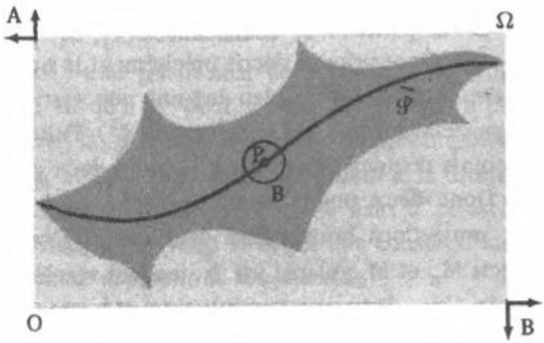


FIGURE III.25

Chaque point P de $\widetilde{\mathcal{P}}$ donne lieu à un seul équilibre. Cette propriété subsiste sur toute une boule centrée en P, sauf si ce point est sur le bord de la boîte. En grisé, l'allure probable de la zone d'unicité.

DEMONSTRATION

Traduisons cet énoncé en langage géométrique. Tout point $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$ est le centre d'une boule ouverte non vide $\widetilde{\mathcal{B}}$, contenue dans la boîte d'Edgeworth, et telle qu'il n'y ait jamais deux points M et M' de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en un même point C de $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Supposons que ce ne soit pas vrai. On peut donc trouver un point $P \in \widetilde{\mathcal{P}}$, une suite de points C_n convergeant vers P dans la boîte d'Edgeworth, et pour chacun d'eux deux points M_n et M'_n de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en C_n. On notera (x_1, x_2) les coordonnées de P, $(\omega_{1n}, \omega_{2n})$ les coordonnées de C_n, $(\omega_{1n}, \omega_{2n}, p_{1n})$ et $(\omega_{1n}, \omega_{2n}, p'_{1n})$ les coordonnées de M_n et M'_n. On a donc :

$$\omega_{1n} \to x_1 \text{ et } \omega_{2n} \to x_2$$

$$\forall n, p_{1n} \neq p'_{1n}.$$

Considérons les suites p_{1n} et p'_{1n}. Elles sont toujours comprises entre 0 et 1. Comme l'intervalle [0, 1] est compact, on peut en extraire des sous-suites convergentes. On les notera $p_{1(n)}$ et $p'_{1(n)}$; leurs limites seront p_1 et p'_1. On sait que $(p_{1(n)}, 1 - p_{1(n)})$ et $(p'_{1(n)}, 1 - p'_{1(n)})$ sont des systèmes de prix d'équilibre associés à la répartition initiale $(\omega_{1(n)}, \omega_{2(n)})$. En passant à la limite grâce aux propositions 6 et 7 du paragraphe 1, on en déduit que $(p_1, 1 - p_1)$ et $(p'_1, 1 - p'_1)$ appartiennent à Π et constituent des systèmes de prix d'équilibre associés à la répartition initiale (x_1, x_2).

Or celle-ci est un optimum de Pareto, intérieur à la boîte d'Edgeworth, puisque le point P a été supposé appartenir à $\widetilde{\mathfrak{P}}$. On peut donc appliquer le résultat d'unicité (proposition 3) : $p_1 = p'_1$. Les points $M_{(n)}$ et $M'_{(n)}$ de la surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ ont donc la même limite, à savoir le point M de coordonnées (x_1, x_2, p_1). Ce point appartient à l'arête $\widetilde{\mathfrak{P}}'$, et la proposition 5 décrit précisément la situation locale. La surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ présente au point M un plan tangent non vertical. Elle se comporte donc au voisinage de M comme son plan tangent (1). Puisque celui-ci n'est pas vertical, deux points distincts placés sur lui auront deux projections horizontales distinctes. Donc deux points distincts placés sur $\widetilde{\mathfrak{E}}$ et assez voisins de M auront deux projections horizontales distinctes. Or on a trouvé des suites de points distincts M_n et M'_n, placés sur $\widetilde{\mathfrak{E}}$, tendant vers M, et ayant même projection horizontale. On a donc une contradiction, et la proposition est démontrée par l'absurde.

Il est utile de comparer les propositions 3 et 6. La première donne l'unicité en un point, pourvu que ce soit un optimum de Pareto et que chaque agent soit doté de chaque bien. La deuxième étend l'unicité à tout un voisinage de ce point. Par contre, quelques dessins dans la boîte d'Edgeworth montrent rapidement qu'on perd l'unicité au bord. A un optimum de Pareto $(\vec{\omega}, \vec{\alpha}) \in (\mathbb{R}_+^2)^2$, où une des composantes est nulle, correspond en général une infinité de prix d'équilibre possible : il y a tout un intervalle de valeurs possibles pour p_1 (donc pour p_2). Une fois encore, le fait de se cantonner à l'étude de $\widetilde{\mathfrak{P}}$ et $\widetilde{\mathfrak{E}}$ permet d'éviter ce genre de phénomènes de bord. Elle n'en reste pas moins significative ; par exemple, il ressort de la proposition 6, qu'il y a tout un ouvert non vide de répartitions initiales pour lesquelles on a l'unicité.

(1) Cette partie du raisonnement peut sembler plus intuitive que rigoureuse. On peut la rendre parfaitement précise en invoquant le théorème des fonctions implicites.

5. Nombre d'équilibres

La question du nombre d'équilibres compatibles avec une répartition initiale donnée englobe toutes celles que nous avons traitées jusqu'ici. La question de l'existence consiste à savoir s'il y en a au moins un, la question de l'unicité consiste à savoir s'il peut y en avoir plus. Nous y avons répondu aux paragraphes 2 et 4 respectivement. Nous nous attaquons maintenant à la question plus générale du nombre d'équilibres. Là encore, nous nous plaçons dans le cas $\ell = 2 = m$., et nous faisons nôtre tout le formalisme développé au paragraphe précédent à propos de la boîte de Balasko. C'est la proposition 4.5 qui va nous apporter la réponse.

Soit $\mathfrak{T}'$ une génératrice de la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$, rencontrant l'arête $\widetilde{\mathfrak{P}}'$ au point P'. On a vu qu'il ne peut y avoir sur $\mathfrak{T}'$ qu'un point où le plan tangent à $\widetilde{\mathfrak{S}}$ soit vertical. Ce point H' jouera un rôle très important dans la suite. Sa projection H sur la boîte d'Edgeworth appartient à la droite $\mathfrak{T}$: on l'appelle le *point caractéristique* de $\mathfrak{T}$. Quand P' varie dans $\widetilde{\mathfrak{P}}'$, c'est-à-dire quand la droite $\mathfrak{T}'$ décrit la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$, le point H décrit une courbe $\mathfrak{A}$ de la boîte d'Edgeworth, appelée le *contour apparent* de la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$.

Je reviendrai plus tard sur cette appellation. Pour l'instant, remarquons simplement qu'à la différence de la courbe $\widetilde{\mathfrak{P}}$, le contour apparent $\mathfrak{A}$ n'est pas une courbe continûment dérivable : elle peut présenter des croisements et des rebroussements. C'est en général une réunion d'arcs continûment dérivables, accolés par leurs extrémités ou se terminant sur le bord de la boîte d'Edgeworth. Les extrémités communes aux arcs seront les rebroussements, et leurs intersections mutuelles les croisements. En chacun de ses points H, sauf aux rebroussements et aux croisements, le contour apparent admettra alors une tangente $\mathfrak{T}$ bien définie. La proposition suivante dit que c'est justement la droite $\mathfrak{T}$ dont H est le point caractéristique.

PROPOSITION 1

Soit P un point de $\widetilde{\mathfrak{P}}$ et $\mathfrak{T}$ la tangente commune aux courbes d'indifférence passant par P. On suppose que $\mathfrak{T}$ a un point caractéristique H intérieur à la boîte d'Edgeworth. Alors H est le milieu d'un petit arc de courbe continu, entièrement tracé sur le contour apparent $\mathfrak{A}$. Si en outre il est différentiable, la tangente en H à la courbe $\mathfrak{A}$ n'est autre que la droite $\mathfrak{T}$.

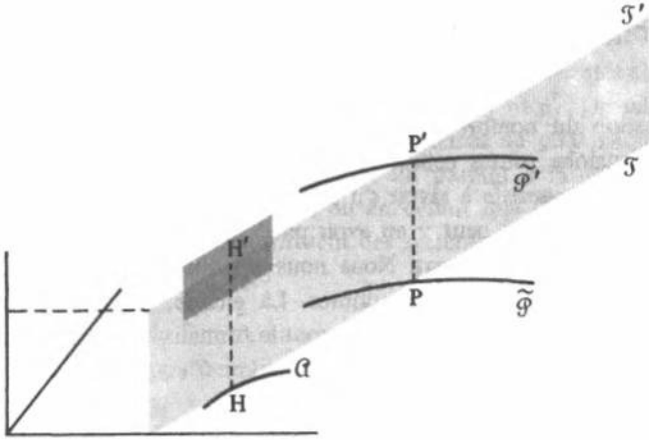


FIGURE III.26

La figure est en dimension trois. Elle représente une génératrice $\mathcal{T}'$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ et son point caractéristique H'. Noter le plan tangent vertical en H', et le contour apparent $\mathcal{A}$.

DEMONSTRATION

Reprenons la représentation paramétrique de $b(\widetilde{\mathcal{E}})$ donnée au paragraphe précédent (proposition 4.5). Nous n'en retenons que les deux premières coordonnées, puisque nous nous intéressons à la projection horizontale. A chaque $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$ correspond un point $P_t \in \widetilde{\mathcal{P}}$, de coordonnées $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ (formules (29) à (31)), de telle sorte que $P_0 = P$. Soit $\mathcal{T}_t$ la tangente commune aux courbes d'indifférence passant par P_t : on aura $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$. On a pour $\mathcal{T}_t$ la représentation paramétrique (formule (35)).

$$\mathcal{T}_t = \left\{ (\xi_1(t) + \pi_2(t)\, s, \xi_2(t) - \pi_1(t)\, s) \mid s \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

où les fonctions π_1 et π_2 sont données par les relations (36) et (37).

Le point caractéristique H de correspond aux valeurs $t = 0$, $s = -1/\lambda_1$ des paramètres où le scalaire λ_2 est défini par les équations :

$$\begin{cases} \pi_2'(0) = \lambda_1\, \pi_2(0) + \lambda_2\, \xi_1'(0) \\ -\pi_1'(0) = -\lambda_1\, \pi_1(0) + \lambda_2\, \xi_2'(0). \end{cases} \tag{2}$$

On a montré que les vecteurs $(\pi_2(0), -\pi_1(0))$ et $(\xi_1'(0), \xi_2'(0))$ étaient linéairement indépendants, c'est-à-dire que le déterminant $\pi_2(0)\, \xi_2'(0) + \pi_1(0)\, \xi_1'(0)$ du système (2) est non nul. Comme la fonction $\pi_2\, \xi_2' + \pi_1\, \xi_1'$

est continue, elle restera non nulle dans un voisinage de zéro : il existe un $\eta > 0$ tel que $\pi_2(t)\,\xi_2'(t) + \pi_1(t)\,\xi_1'(t) \neq 0$ pour $|t| < \eta$. Cela signifie que le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_2'(t) = \lambda_1(t)\,\pi_2(t) + \lambda_2(t)\,\xi_1'(t) \\ -\pi_1'(t) = \lambda_1(t)\,\pi_1(t) + \lambda_2(t)\,\xi_2'(t) \end{array}\right. \tag{3}$$

a une solution unique $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$, pour tout $t \in\ ]-\eta, \eta[$. Il est facile de voir que la fonction $t \to \lambda_2(t)$ ainsi définie est continue. Bien entendu, on a $\lambda_2(0) = \lambda_2 \neq 0$, et on peut donc supposer η assez petit pour que $\lambda_2(t)$ soit non nul.

Par définition, le point H_t correspondant aux valeurs t et $s = -1/\lambda_2(t)$ des paramètres est le point caractéristique de la droite $\mathcal{T}_t$. Quand t varie entre $-\eta$ et η, le point H_t décrit donc un arc appartenant au contour apparent $\mathcal{A}$. On obtient les coordonnées du point H_t en reportant dans l'équation (1) les valeurs correspondantes des paramètres

$$H_t \left\{\begin{array}{l} \xi_1(t) - \pi_2(t)/\lambda_2(t) \\ \xi_2(t) + \pi_1(t)/\lambda_2(t). \end{array}\right. \tag{4}$$

Ceci constitue une représentation paramétrique du contour apparent $\mathcal{A}$ au voisinage du point H. Comme les deux coordonnées sont des fonctions continues de $t \in\ ]-\eta, \eta[$, l'arc en question est continu (1).

S'il est différentiable, on obtient un vecteur tangent (non nul) en dérivant les équations (4), ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1'(t) - \pi_2'(t)/\lambda_2(t) + \lambda_2'(t)\,\pi_2(t)/[\lambda_2(t)]^2 \\ \xi_2'(t) + \pi_1'(t)/\lambda_2(t) - \lambda_2'(t)\,\pi_1(t)/[\lambda_2(t)]^2 \end{array}\right. \tag{5}$$

Reportons dans ces expressions les équations (3). On obtient pour le vecteur tangent les composantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_2(t)\,(-\lambda_1(t)/\lambda_2(t) + \lambda_2'(t)/[\lambda_2(t)]^2) \\ -\pi_1(t)\,(-\lambda_1(t)/\lambda_2(t) + \lambda_2'(t)/[\lambda_2(t)]^2). \end{array}\right. \tag{6}$$

---

(1) Pour que cet arc de courbe soit différentiable, il faudrait, non seulement que les deux composantes de (4) soient différentiables, mais encore qu'elles ne soient pas nulles simultanément.

Il est colinéaire au vecteur $(\pi_2\ (t), -\pi_1\ (t))$, qui est justement le vecteur directeur de la droite $\mathfrak{T}_t$. Le résultat est établi, non seulement pour H, mais pour les H_t, c'est-à-dire pour tous les points de $\mathfrak{A}$ voisins de H.

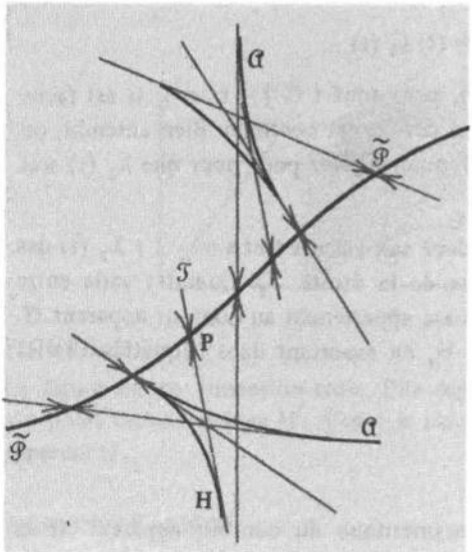


FIGURE III.27

On a représenté une partie de la courbe $\widetilde{\mathfrak{P}}$, avec les portions du contour apparent $\mathfrak{A}$ qu'elle engendre. On a figuré également quelques positions de la droite $\mathfrak{T}$ et de son point caractéristique H.

En d'autres termes, quand P parcourt $\widetilde{\mathfrak{P}}$, la droite $\mathfrak{T}$ décrit l'ensemble des tangentes au contour apparent $\mathfrak{A}$: on dit que celui-ci est *l'enveloppe* de la famille des droites $\mathfrak{T}$. C'est une notion tout à fait classique en géométrie plane, qui consiste à définir une courbe, non par l'ensemble de ses points, mais par l'ensemble de ses tangentes. On passe d'ailleurs facilement d'un point de vue à l'autre. Ici même nous avons montré comment obtenir une représentation paramétrique pour la courbe $\mathfrak{A}$ (formules (4)), quand on en connaît une pour la famille de droites $\mathfrak{T}$ (formules (1)). En pratique, si la droite $\mathfrak{T}$ est donnée par son équation (dépendant du paramètre t) :

$$\pi_1\ (t)\,(x_1 - \xi_1\ (t) + \pi_2\ (t)\,(x_2 - \xi_2\ (t)) = 0 \qquad (7)$$

on obtiendra l'équation de la courbe $\mathfrak{A}$ en éliminant t entre l'équation (7) et l'équation dérivée par rapport au paramètre :

$$\pi'_1\ (t)\,(x_1 - \xi_1\ (t)) + \pi'_2\ (t)\,(x_2 - \xi_2\ (t)) = \pi_1\ (t)\xi'_1\ (t) + \pi_2\ (t)\,\xi'_2\ (t) \qquad (8)$$

ce qui donne :

$$x_1 = \xi_1(t) - \pi_2(t)\ \frac{\pi_1(t)\,\xi_1'(t) + \pi_2(t)\,\xi_2'(t)}{\pi_1(t)\,\pi_2'(t) - \pi_1'(t)\,\pi_2(t)}$$

$$x_2 = \xi_2(t) + \pi_1(t)\ \frac{\pi_1(t)\,\xi_1'(t) + \pi_2(t)\,\xi_2'(t)}{\pi_1(t)\,\pi_2'(t) - \pi_1'(t)\,\pi_2(t)}$$

On retrouve les formules (4), où λ_2 (t) a été remplacé par sa valeur. L'intérêt de tout ceci est qu'on peut tracer le contour apparent $\mathfrak{A}$ en travaillant uniquement dans la boîte d'Edgeworth. On observera d'ailleurs que la proposition 1 se situe entièrement dans ce cadre. Point n'est besoin de faire appel à la troisième dimension : la construction de la courbe $\mathfrak{A}$ est ramenée à un problème classique de géométrie plane.

Pourquoi se donner tant de mal pour la construire ? C'est qu'elle constitue une frontière, dont le franchissement augmente ou diminue de deux le nombre d'équilibres. Il n'est question ici que d'équilibres $(\vec{\omega}, \vec{\alpha}; \vec{p}; \vec{x}, \vec{y})$ tels que x_1, x_2, y_1, y_2 soient non nuls. Le point M de coordonnées (x_1, x_2, p_1) dans la boîte de Balasko appartient alors à la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$, et l'on peut employer tout l'outillage construit depuis le paragraphe 5. Nous dirons alors que $(\vec{\omega}, \vec{\alpha}; \vec{p}; \vec{x}, \vec{y})$ est un *équilibre strict.* Encore une notation : nous dirons que H est un *point simple* du contour apparent $\mathfrak{A}$ s'il y a au-dessus de H un seul point $H' \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ où le plan tangent soit vertical, et si une certaine condition de contact est satisfaite. Nous ne la préciserons pas davantage (1), quitte à laisser une certaine imprecision à la discussion qui va suivre. Leur énoncé précis, et surtout leur démonstration, nécessiterait d'ailleurs beaucoup trop de technique mathématique. Disons simplement qu'elle exprime que la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$ n'adhère pas trop à son plan tangent au point H'.

On peut alors montrer un certain nombre de choses, qui sont heureusement des évidences géométriques. Soit $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ un arc du contour apparent, continûment différentiable et constitué de points simples. Par définition, il existe au-dessus de lui un arc de courbe $\mathfrak{A}'_0$ tracé sur $\widetilde{\mathfrak{S}}$, lui aussi continûment différentiable, et le long duquel le plan tangent à $\widetilde{\mathfrak{S}}$ est vertical. Alors la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$ doit faire un pli : elle présente une feuille inférieure et une feuille supérieure

(1) Mathématiquement, la courbure de la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$ au point H' doit être non nulle. Cela exige en particulier que cette surface soit deux fois continûment différentiable.

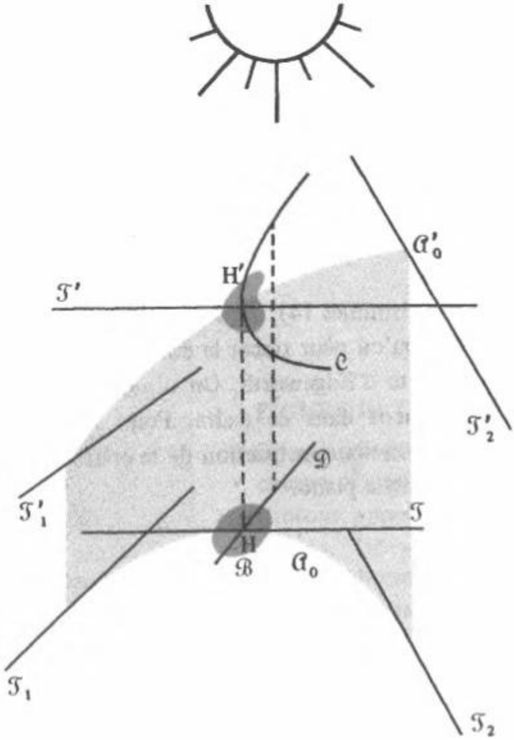


FIGURE III.28

La figure est en trois dimensions : en haut la surface $\widetilde{\mathcal{E}}$, qui se replie autour de la courbe $\mathcal{A}'_0$, laquelle se projette suivant le contour apparent $\mathcal{A}_0$. On a représenté la génératrice $\mathcal{T}'$ et son point caractéristique H′ (en $\mathcal{T}'_1$ et $\mathcal{T}'_2$ d'autres positions possibles). On a hachuré un disque $\mathcal{B}$ autour de H en bas, et son relèvement $\mathcal{B}'$ en haut. On a également représenté la section $\mathcal{C}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ par un plan vertical passant par $\mathcal{D}$.

qui se raccordent verticalement le long de l'arc $\mathcal{A}'_0$. Une verticale coupera ce pli en deux points ou pas du tout suivant sa position par rapport à l'arc $\mathcal{A}'_0$, ou à sa projection horizontale $\mathcal{A}_0$. Bien entendu, ceci est plutôt un phénomène local. Pour être précis, prenons un point quelconque H de l'arc $\mathcal{A}_0$, se relevant en un point H′ de l'arc $\mathcal{A}'_0$. Si l'on prend un nombre $\rho > 0$ assez petit, la sphère $\mathcal{B}'$ de centre H′ et de rayon ρ (dans la boîte de Balasko) et le cercle $\mathcal{B}$ de centre H et de rayon ρ (dans la boîte d'Edgeworth) auront la propriété suivante. Le contour apparent $\mathcal{A}_0$ partage le cercle $\mathcal{B}$ en deux régions $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_2$, recouvertes respectivement zéro et deux fois par la nappe $\mathcal{B}' \cap \widetilde{\mathcal{E}}$. Tout point C de $\mathcal{B}_0$ a deux antécédents dans $\mathcal{B}' \cap \mathcal{E}'$; aucun point de $\mathcal{B}' \cap \mathcal{E}'$ ne se projette dans $\mathcal{B}_0$. Traversons la frontière $\mathcal{A}_0$ en H, en passant de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_2$: les deux antécédents du point C viennent se confondre en H′ quand C arrive en H, et disparaissent au-delà.

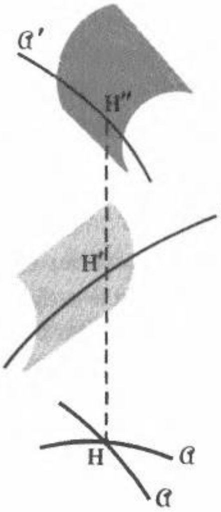


FIGURE III.29

On montre ici un *point double* H de $\mathfrak{A}$: deux arcs du contour apparent, correspondant à deux nappes distinctes de $\widetilde{\mathfrak{E}}$, se coupent en ce point.

Toute cette analyse repose bien entendu sur l'hypothèse que H est un point simple du contour apparent. Il est clair par exemple que si H est un point double, c'est-à-dire s'il a deux antécédents H′ et H″ distincts dans $\mathfrak{A}'$, les couples d'équilibres associés à chacun d'eux évolueront indépendamment. On verra donc se superposer jusqu'à quatre équilibres stricts distincts. Mais H peut n'avoir qu'un antécédent H′ dans $\mathfrak{A}'$, sans être pour autant un point simple de $\mathfrak{A}$: c'est que la condition de contact n'est pas satisfaite. Comme nous n'avons pas explicité celle-ci, la situation est beaucoup moins claire. Nous n'allons pas tenter de l'analyser : contentons-nous de savoir qu'elle est exceptionnelle. En effet, par des méthodes sur lesquelles je ne m'étendrai pas ([1]), il est possible de montrer qu'en général :

(a) le contour apparent $\mathfrak{A}$ est une réunion finie d'arcs indéfiniment différentiables ;
(b) tous les points de $\mathfrak{A}$ sont simples, à l'exception des extrémités des arcs et de leurs points d'intersections.

En particulier, tous les points de $\mathfrak{A}$ sont simples, sauf un nombre fini (dont les points de rebroussement, et ceux de croisement). Le mot « en général » signifie que si notre boîte de Balasko ne se plie pas aux règles (a) et (b), il suffira de perturber les fonctions d'utilité u et v pour obtenir une boîte

(1) Il s'agit essentiellement des théorèmes de transversalité de Thom.

conforme. Les perturbations de u et de v seront des fonctions, non nulles bien entendu, mais arbitrairement petites, ainsi que leurs dérivées successives. En outre, toutes les boîtes de Balasko suffisamment voisines d'une boîte conforme seront elles aussi conformes : la situation décrite par les règles (a) et (b) est stable. Voilà qui doit nous rassurer sur la portée des résultats que nous avons obtenus concernant les points simples.

Le moment est maintenant venu de justifier le nom de « contour apparent » appliqué à la courbe $\mathfrak{C}$. C'est elle qui constitue le contour de la surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ pour un observateur situé au-dessus d'elle, à l'infini. C'est le dessin qu'il en ferait. On peut également imaginer la surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ réalisée en verre et la boîte d'Edgeworth remplacée par un écran horizontal. L'ensemble étant éclairé par le soleil, on verra apparaître sur l'écran des zones pius ou moins ombrées, suivant les épaisseurs successives que la lumière doit traverser. C'est le contour apparent qui délimite ces zones de luminosité différente. Il se détachera d'ailleurs nettement, ligne sombre sur un fond clair. C'est que, pour atteindre un point tel que H, les rayons du soleil ont dû traverser la surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ au point H$'$, où elle se présente tangentiellement. La lumière y sera plutôt réfléchie que réfractée ; le peu qui sera transmis aura une épaisseur de verre beaucoup plus importante à traverser que si les rayons arrivaient transversalement. Tout ceci concourt à ce qu'il y ait fort peu de lumière qui parvienne au contour apparent, beaucoup moins en tout cas qu'aux points immédiatement voisins.

Quant à la signification économique de ce contour apparent, elle est maintenant très claire. Lorsque le point C représentant la répartition initiale franchit la courbe $\mathfrak{C}$ en un point simple, le nombre d'équilibres stricts possibles varie de deux, en plus ou en moins. Le contour apparent est donc le siège d'un phénomène discontinu : apparition ou disparition simultanée de deux équilibres stricts. Le changement n'est plus quantitatif, comme le serait un simple déplacement des équilibres existants, mais qualitatif. Dans la terminologie de René Thom, ce genre de phénomènes est appelé une *catastrophe*. Plutôt que de nous embarquer dans cette direction, et de montrer comment la boîte de Balasko s'insère dans la théorie des catastrophes, je vais me demander si les phénomènes ainsi décrits sont les seuls possibles. En déplaçant le point C, peut-on observer autre chose que l'apparition ou la disparition deux par deux d'équilibres stricts ?

La réponse serait négative s'il n'y avait pas les phénomènes de bord. Mais ici il faut tenir compte des équilibres non stricts. Certes, nous avons renoncé à les étudier pour eux-mêmes. Mais peut-être qu'en suivant un des équilibres stricts attachés au point C, nous le verrons se transformer en équilibre non strict ? Cela ne peut se produire que si un des points $M \in \widetilde{\mathfrak{E}}$ se projetant en C vient au bord de la surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$. Nous voici donc mis en demeure d'étudier ce bord.

Dire qu'un point M appartient à la surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ signifie deux choses : qu'il est dans la boîte de Balasko ; et que la génératrice $\mathcal{T}'$ qui le supporte passe par l'arête $\widetilde{\mathcal{P}}'$. Cette arête est une courbe, continûment différentiable, et limitée aux parois de la boîte de Balasko. Considérons les points de contact avec les parois, c'est-à-dire les extrémités de la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}'$. Il n'y en a que deux, D'_1 et D'_2, si elle est d'un seul tenant ; il peut y en avoir deux autres, D'_3 et D'_4, si elle se compose de deux arcs distincts, deux autres encore, D'_5 et D'_6, s'il y a trois arcs, et ainsi de suite. On notera $\mathcal{D}'_n$ la génératrice issue du point D_n. Ainsi, la surface $\widetilde{\mathfrak{E}}$ est limitée par ses intersections avec les parois de la boîte d'une part, par les droites $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2, \ldots$ d'autre part.

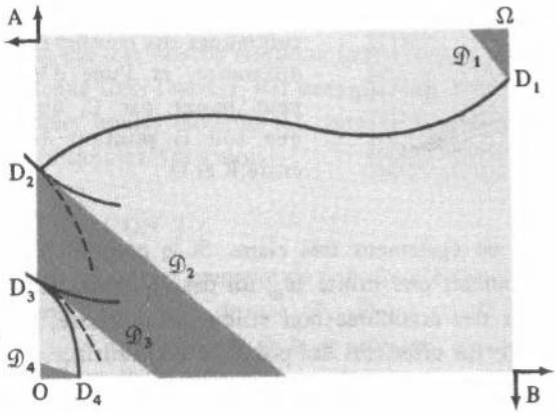


FIGURE III.30

On a représenté un cas typique : le bord de $\widetilde{\mathfrak{E}}$ se projette sur la boîte d'Edgeworth suivant quatre droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$. La région extérieure (en grisé) n'appartient donc pas à cette projection.

En projection, l'arête $\widetilde{\mathcal{P}}'$ se projette, suivant la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$, les extrémités $D'_1, D'_2, \ldots$ de l'une suivant les extrémités $D_1, D_2, \ldots$ de l'autre, et les droites $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2$ suivant des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$. Tous ces éléments peuvent être construits directement dans la boîte d'Edgeworth. La courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$ est connue ; ses extrémités, sur les côtés du rectangle O A Ω B, sont les points $D_1, D_2, \ldots$. En chacun de ces points, il n'y a encore qu'une tangente commune possible aux courbes d'indifférence : ce sont les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$. Les points de suspension peuvent laisser rêveur. De fait, il peut se faire que la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$ ait une infinité d'arcs, et donc une infinité d'extrémités sur les côtés de la boîte d'Edgeworth.

Heureusement, on peut montrer que ce cas est pathologique. Plus précisément, on peut ajouter aux règles (a) et (b) une troisième :

(c) la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$ rencontre transversalement les côtés de la boîte d'Edgeworth ; en particulier, elle n'y a qu'un nombre fini d'extrémités.

Les règles (a), (b), (c) restent valables « en général », c'est-à-dire dans les conditions décrites ci-dessus. Bien entendu, s'il n'y a qu'un nombre fini de points D_n, il n'y aura qu'un nombre fini de droites $\mathcal{D}_n$.

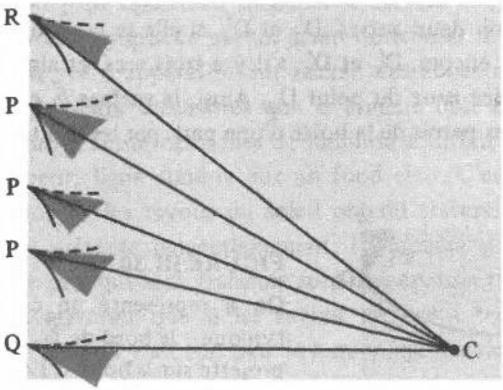


FIGURE III.31

Ce dessin montre la situation quand l'optimum de Pareto P se déplace sur le côté de la boîte d'Edgeworth : il y a tout un cône (en grisé) de « tangentes » communes aux courbes d'indifférence, et l'une d'elles peut passer par C, quelle que soit la position de P entre R et Q.

Leur signification économique est également très claire. Si le point C représentant la répartition initiale franchit une droite $\mathcal{D}_n$, un des équilibres stricts possibles dégénère pour donner des équilibres non stricts (ou l'inverse, si le passage a lieu dans l'autre sens). En effet, un des points M de la surface $\widetilde{\mathfrak{S}}$ se projetant en C vient frapper la génératrice $\mathcal{D}'_n$. Ou, si l'on préfère, l'une des tangentes communes $\mathfrak{T}$ menées du point C aux courbes d'indifférence vient en $\mathcal{D}_n$. Le point de tangence vient en D_n, sur le bord de la boîte d'Edgeworth. Il décrit donc un optimum de Pareto privant un des agents de l'un des biens ; l'équilibre correspondant n'est pas strict. Il est encore unique ; mais si le mouvement se poursuit, le point de contact se déplace sur le côté du rectangle O A Ω B, et il devient indispensable d'entendre la tangence dans le sens plus général que nous lui avons donné au paragraphe 3. On s'aperçoit alors qu'une fois la droite $\mathcal{D}_n$ franchie, il y a tout un intervalle de points sur le côté du rectangle O A Ω B où une des tangentes communes aux courbes d'indifférence passe par le point C. L'équilibre strict décrit par le point M a donc dégénéré en un équilibre non strict (sur la droite $\mathcal{D}_n$), puis une infinité de ceux-ci. Bien entendu, si le point C franchit simultanément deux droites $\mathfrak{D}_n$ et $\mathfrak{D}_m$ (si elles sont confondues, ou si l'on passe par leur intersection), il faut superposer les phénomènes relevant de chacune d'elles.

Le moment est venu de récapituler et de conclure. Nous avons mis en évidence deux types de phénomènes élémentaires :

(i) franchissement du contour apparent $\mathfrak{A}$: apparition ou disparition de deux équilibres stricts ;

(ii) franchissement d'une des droites $\mathfrak{D}_n$: dégénérescence d'un équilibre strict en une famille d'équilibres non stricts.

Encore faut-il vérifier que l'on épuise ainsi toutes les possibilités : il ne peut rien arriver à un équilibre strict qui ne se ramène à une superposition de ces phénomènes élémentaires. C'est le rôle de la proposition suivante ; nous pouvons même la démontrer ! Elle fait appel à la notion d'ouvert *connexe :* cela signifie qu'il est d'un seul tenant. Deux points quelconques de cet ouvert peuvent être joints par une courbe continue (par exemple une ligne polygonale) entièrement contenue dans l'ouvert. Par exemple, une boule ouverte est connexe ; la réunion de deux boules ouvertes est connexe si elles se coupent, non connexe si elles sont disjointes. On a alors :

PROPOSITION 2

Soit $\mathfrak{U}$ un ouvert connexe de la boîte d'Edgeworth ne rencontrant ni le contour apparent $\mathfrak{A}$, ni les droites $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, ... Il n'y a jamais qu'un nombre fini M_1, . . ., M_r de points de $\widetilde{\mathfrak{S}}$ se projetant en un même point C de $\mathfrak{U}$. Quand C varie dans l'ouvert $\mathfrak{U}$, ce nombre r est constant, et ces points M_1, . . ., M_r varient continûment sur $\widetilde{\mathfrak{S}}$.

DEMONSTRATION

Vérifions d'abord la propriété de finitude. Si elle était fausse, on pourrait trouver un point C de $\mathfrak{U}$ et une suite de M_n points de $\widetilde{\mathfrak{S}}$, deux à deux distincts et se projetant en C. Tous ces points appartiennent à la boîte de Balasko, qui est un fermé borné de l'espace à trois dimensions. On peut donc extraire une sous-suite $M_{(n)}$, convergeant vers un point M qui se projetterait également en C. Or, toute limite de points de $\widetilde{\mathfrak{S}}$ doit appartenir à cette surface ou à son bord.

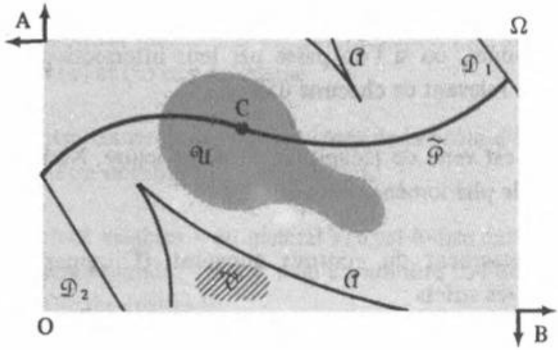


FIGURE III.32

On a représenté deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ (grisés différemment), à chacun desquels la proposition 2 peut être appliquée : le nombre r de points de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en un même point C constant. Pour $\mathcal{U}$, $r = 1$: il suffit de l'évaluer quand C est sur $\widetilde{\mathcal{E}}$. Pour se passer de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$, il faut franchir $\mathcal{A}$, donc faire varier r de deux unités : $r = 3$ sur $\mathcal{V}$.

On a donc l'alternative suivante :

(i) ou bien M appartient à $\widetilde{\mathcal{E}}$. Comme sa projection C n'appartient pas au contour apparent $\mathcal{A}$, le plan tangent à la surface $\widetilde{\mathcal{E}}$ au point M n'est pas vertical. Or les vecteurs $\overrightarrow{MM_n} \,/\, \| \overrightarrow{MM_n} \|$ sont tous égaux à un vecteur $\vec{v}$, d'origine M, de longueur l, vertical et dirigé verticalement. Comme le point M_n tend vers M en restant sur $\widetilde{\mathcal{E}}$, le vecteur $\vec{v}$ est tangent à cette surface. On a donc exhibé un vecteur vertical tangent à $\widetilde{\mathcal{E}}$ en M. ce qui contredit le fait que le plan tangent est non vertical.

(ii) ou bien M appartient au bord de $\widetilde{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire à l'une des génératrices $\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{D}'_2$, ... Or sa projection C a été supposée n'appartenir à aucune des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ... D'où à nouveau une contradiction.

On aboutit à une contradiction dans les deux cas, et la finitude est ainsi démontrée. Prenons maintenant dans l'ouvert $\mathcal{U}$ deux points C_0 et C_1, supposons qu'il y ait r_0 points de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en C_0 et r_1 points de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en C_1, et montrons que $r_0 = r_1$. Joignons C_0 et C_1 par une courbe continue tracée dans $\mathcal{U}$: il s'agit d'une application continue $c : [0, 1] \to \mathcal{U}$, telle que $c(0) = M_0$ et $c(1) = M_1$. C'est possible puisque l'ouvert $\mathcal{U}$ est connexe. Notons r_t le nombre de points de la surface $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en $c(t)$.

Je dis que la fonction $t \to r_t$ est continue sur [0, 1]. En effet, considérons une suite t_n convergeant vers t ; on posera $c(t_n) = C_n$, $c(t) = C$, et $r_{tn} = r_n$, $r_t = r$. La verticale passant par C coupe la surface $\widetilde{\mathcal{E}}$ en r points $M_1, \ldots, M_r$. En chacun de ces points, le plan tangent est non vertical, puisque C appartient à $\mathcal{U}$ qui ne rencontre pas le contour apparent. On a vu en démontrant la proposition 4.6 que la surface se comporte comme son plan tangent au voisinage des points $M_1, \ldots, M_r$. En particulier, pour tout nombre $\rho > 0$ suffisamment petit, les sphères $\mathcal{B}'_i$ de centre M_i et de rayon ρ sont distinctes $(1 \leqslant i \leqslant r)$, se projettent suivant le cercle $\mathcal{B}$ de centre C et de rayon ρ et toute verticale issue d'un point de $\mathcal{B}$ coupe chacune des feuilles $\mathcal{B}'_i \cap \widetilde{\mathcal{E}}$ en un point exactement. En particulier, dès que le point C_n appartiendra à $\mathcal{B}$, il aura au moins r antécédents dans $\widetilde{\mathcal{E}}$. On aura donc $r_n \geqslant r$ à partir d'un certain rang.

On a même l'égalité $r_n = r$, toujours à partir d'un certain rang. Sinon, on pourrait extraire une sous-suite $C_{(n)}$ avec $r_{(n)} \geqslant r + 1$. On pourrait donc trouver $(r + 1)$ points distincts de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en $C_{(n)}$. Quand (n) tend vers l'infini, chacun de ces points doit converger vers un point de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en C. Or il n'y a que r possibilités $M_1, \ldots, M_r$. L'un de ces points, M_1 par exemple, doit donc servir deux fois : il y a deux suites $M_{(n)}$ et $M'_{(n)}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$, convergeant vers M_1, se projetant suivant $C_{(n)}$, et distinctes terme à terme. En particulier, pour (n) assez grand, les points $M_{(n)}$ et $M'_{(n)}$ appartiennent à $\mathcal{B}'_1 \cap \widetilde{\mathcal{E}}$ et se projettent en un même point $C_{(n)}$ de $\mathcal{B}$. Ceci contredit la définition des $\mathcal{B}'_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, construits ci-dessus.

La fonction $t \to r_t$ est continue (et même localement constante) sur l'intervalle [0, 1]. Comme elle ne prend que des valeurs entières, elle doit être constante. En particulier $r_0 = r_1$. Ce nombre dépend donc de l'ouvert $\mathcal{U}$, mais non du point C choisi dedans. Quand C_n tend vers C dans $\mathcal{U}$, les r points $M_{n1}, \ldots, M_{nr}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en C_n tendent vers les r points $M_1, \ldots, M_r$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en C. On en déduit facilement qu'il existe r applications continues $\mu_1, \ldots, \mu_r$ de $\mathcal{U}$ dans $\widetilde{\mathcal{E}}$ telles que, en tout point C de $\mathcal{U}$, les r points de $\widetilde{\mathcal{E}}$ se projetant en C soient donnés par les formules :

$$M_1 = \mu_1(C), \ldots, M_r = \mu_r(C).$$

La conclusion est claire : le contour $\mathcal{A}$ et les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$, partagent la boîte d'Edgeworth en régions où le nombre d'équilibres stricts est constant. Si on est dans le cas « général », où les conditions (a), (b), (c) sont satisfaites, les régions ainsi délimitées sont en nombre fini. Quand on passe de l'une à l'autre, la transformation observée dépend de la frontière que l'on franchit. Variation de deux du nombre d'équilibres stricts si c'est le contour $\mathcal{A}$. Dégénérescence d'un équilibre strict en une famille d'équilibres non stricts si c'est une des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$.

Ces résultats sont de grande portée. Remarquons par exemple que, au moins si les conditions (a), (b), (c) sont satisfaites, le contour $\mathcal{A}$ et les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$, sont de mesure nulle (intuitivement, une courbe n'a pas d'épaisseur, l'aire qu'elle occupe est donc nulle). Tirons au hasard un point de la boîte d'Edgeworth, en admettant que la probabilité de tomber dans un certain rectangle est proportionnelle à son aire. La probabilité de tomber sur le contour $\mathcal{A}$, ou sur des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$, est nulle. En d'autres termes, presque tous les points C de la boîte d'Edgeworth sont justiciables de la proposition 2. Cela veut dire que, pour presque toute répartition initiale, il n'y a qu'un nombre fini d'équilibres stricts compatibles avec celle-ci, et ils en dépendent continûment.

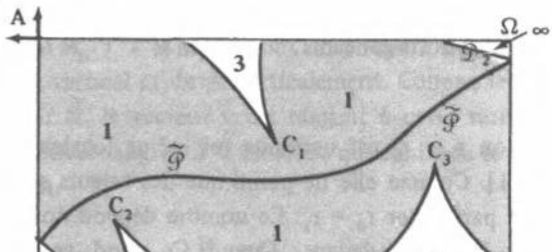


FIGURE III.33

Les points C_1, C_2, C_3 sont des rebroussements, C_4 est un croisement ; tous les autres points du contour apparent sont simples. La zone d'unicité est grisée : c'est celle qui contient $\widetilde{\mathcal{P}}$. On en déduit le nombre d'équilibres dans les autres zones.

Dans un voisinage de la répartition initiale tirée au sort, il y aura r systèmes de prix d'équilibre stricts, et ils s'exprimeront comme r fonctions continues :

$$\vec{p}_1 = \varphi_1 (\vec{\omega}, \vec{\alpha}), \ldots, \vec{p}_r = \varphi_r (\vec{\omega}, \vec{\alpha}).$$

On peut donc dire qu'en général, les prix d'équilibre varient continûment avec la répartition initiale. Il n'en est plus ainsi sur les frontières, contour ou droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ... Supposons par exemple qu'au départ le point C soit placé sur la courbe $\widetilde{\mathcal{P}}$: l'équilibre sans transaction est le seul possible (proposition 4.3). Faisons-le bouger : tant qu'on ne franchit pas une frontière, on a toujours un seul équilibre, fonction continue de la répartition initiale. Si maintenant on doit franchir le contour $\mathcal{C}$, on peut s'arranger pour que ce soit en un point simple, et le nombre d'équilibres variera de deux : 3 ou $-$ 1. Comme il ne saurait être négatif, on est en présence de trois équilibres, d'ailleurs tous stricts. Si on franchit à nouveau le contour $\mathcal{C}$, on passe à $3 \pm 2 = 5$ ou 1 équilibre. Si on franchit une des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, . . ., un de ces équilibres stricts dégénère.

On remarque que, tant qu'on ne franchit pas l'une des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, . . ., les équilibres restent stricts et sont tous en nombre impair. En particulier, ce nombre ne peut jamais être nul ! On a là le principe d'une nouvelle démonstration de l'existence d'équilibres compatibles avec une répartition initiale donnée. Cette démonstration s'appuie sur les hypothèses (H1) $-$ (H4) et sur la proposition 4.3, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas appel au théorème combinatoire de Shapley et aux théorèmes de point fixe qui en découlent.

Voici bouclée la boucle, et terminé ce long chapitre. Nous sommes partis des problèmes d'existence, nous sommes passés par les problèmes d'unicité, et nous voici par un autre chemin revenus aux problèmes d'existence. L'étude des économies d'échange pur est terminée, et il est temps d'y introduire la production.

IV. La production

Jusqu'à présent, nous avons étudié une économie d'échanges pure, où les agents sont uniquement des consommateurs et non des producteurs. Il est temps maintenant d'accorder à notre économie la faculté de produire. Une entrée en scène aussi tardive condamne la production à jouer les seconds rôles. Nous verrons dans ce chapitre combien les notions d'optimum de Pareto et d'équilibre concurrentiel s'adaptent aisément, pourvu qu'on laisse le rôle dominant aux consommateurs. On retrouve là le point de vue néoclassique, que j'avais adopté dès le début de ce livre : c'est l'échange qui est le moteur de l'économie. Si les prémisses avaient été différentes, la conclusion serait tout autre. Les marxistes, par exemple, attribuent à la production un rôle tout à fait fondamental. L'idée même d'une économie d'échanges pure, sans production, est alors dépourvue de sens, et la théorie de la valeur est bâtie sur de toutes autres bases. La valeur que j'ai définie au chapitre précédent, est essentiellement une valeur d'échange : les prix d'équilibres ne sont pas liés intrinsèquement aux différents biens, mais dépendent des préférences des consommateurs. Nous allons les faire dépendre aussi des possibilités des producteurs.

1. Ensembles de production

L'économie comprendra dorénavant, outre des consommateurs, des unités de production. Ces unités peuvent se réduire à un seul homme, artisan ou agriculteur, ce peuvent aussi être des entreprises, usines ou manufactures. Pour simplifier, il m'arrivera de parler de « producteurs » sans faire de distinction. Le trait commun de toutes ces unités, c'est qu'elles produisent quelque chose à partir de quelque chose d'autre. Ce sont des systèmes entrée-sortie, où la sortie représente ce qui a effectivement été produit, et l'entrée ce qui a été consommé dans ce but (essentiellement des matières premières, de l'énergie et du travail). Voilà évidemment une analyse très sommaire, mais je ne tenterai pas de faire mieux. J'enferme dans une « boîte noire » tout le détail des opérations de production, et je définis le producteur par une certaine relation entre l'entrée et la sortie.

Ce point de vue présente des avantages et des inconvénients. Il est descriptif et formalisable : pour recueillir ce genre d'informations, il suffit d'envoyer un enquêteur à la porte de l'usine, noter tout ce qui rentre et tout ce qui sort. Point n'est besoin qu'il pénètre à l'intérieur, ni qu'il comprenne le fonctionnement d'une machine-outil. On aura, pour la théorie du producteur, le pendant de la relation de préférence en théorie du consommateur : une description extérieure, quantifiable, et donc objective. Mais on peut s'inquiéter de l'ampleur de tout ce qui a été laissé de côté, et se demander si le bébé n'est pas parti avec l'eau du bain. Qu'on en juge. Le travail humain est traité comme un bien économique de même nature que les autres, comparable par exemple à l'électricité. Pour les sociétés modernes, c'est de moins en moins vrai. Plus grave encore, le capital est absent du modèle, englouti par la boîte noire. Or des phénomènes comme la dépréciation ou l'accumulation du capital sont d'une importance primordiale pour les économies industrielles, et nous devons donc renoncer à en rendre compte. Le capital et le travail, les deux moteurs du processus de production, se trouvent ainsi escamotés. Bien entendu, s'il n'y a pas de capital, il n'y aura pas d'investissements non plus, ni expansion, ni récession, ni aucun des phénomènes financiers qui les accompagnent. Sans monnaie, on serait d'ailleurs bien en peine de les décrire !

Il est indubitable que les théories marxiste ou keynesienne touchent davantage la vraie nature de la production. C'est qu'elles l'envisagent pour elle-même, comme moteur autonome de la machine économique, tandis que l'analyse néo-classique la subordonne à la consommation. Le niveau de production dépendra des prix d'équilibres, et ceux-ci seront dans une large mesure déterminés par les consommateurs. Mais le modèle mathématique ne rend pas justice non plus à la théorie néo-classique. Celle-ci attache une grande importance à la fonction d'entrepreneur, c'est-à-dire à la faculté individuelle de prendre des risques, non seulement en investissant dans des entreprises existantes, mais en en créant de nouvelles. De ce point de vue, c'est une lacune grave du modèle que de ne pas pouvoir exprimer la vie des unités de production, de leur naissance à leur mort. Comment s'en étonner, alors que c'est un modèle en avenir certain : pas d'aléas, donc pas de risques.

Pour superficielle qu'elle soit, cette approche reste intéressante, à condition de ne pas en attendre trop. Il faut certes abandonner toute perspective historique ou temporelle, renoncer à considérer la production comme processus. Le modèle se borne à décrire les interventions des producteurs et des consommateurs sur les différents marchés, pour un état donné de la technologie et moyennant certaines hypothèses de comportement. Il fournit une photographie des courants commerciaux à un instant donné. Nous avons tout sacrifié à la primauté des échanges, et nous étudions finalement comment la production les influence, dans un monde où les consommateurs sont rois et d'où l'avenir est absent.

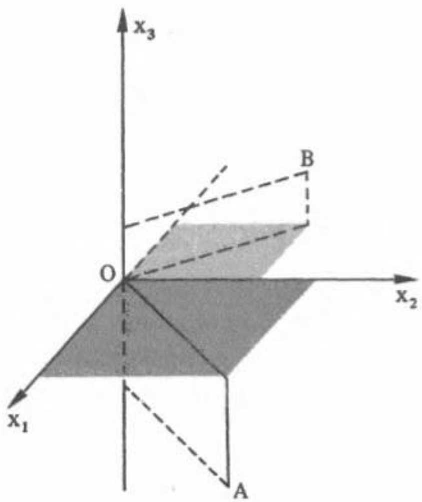


FIGURE IV.1

Deux vecteurs de production différents. En A, l'entreprise produit des biens 1 et 2 (sorties) à partir de bien 3 (sortie). En B, l'entreprise produit des biens 2 et 3 (sorties) à partir de bien 1 (entrée).

Une fois posées les limites de notre investigation, nous pouvons procéder à cette enquête. Une unité de production, ai-je dit, est caractérisée par une certaine relation entre l'entrée et la sortie. On dressera donc la liste de tous les couples entrée-sortie possibles, c'est-à-dire de tous les bilans de production techniquement réalisables par l'unité en question. Pour une usine de Pont-à-Mousson, par exemple, on notera qu'on peut produire des quantités x_1 de fonte ductile, x_2 de laitier et x_3 de pollution atmosphérique en employant des quantités x_4 de travail (éventuellement ventilé entre les divers types de main-d'œuvre), x_5 de minerai, x_6 de coke et x_7 de magnésium. Il sera commode de représenter ce bilan géométriquement, par un point de l'espace à sept dimensions. Pour distinguer les entrées des sorties, on conviendra d'affecter celles-là du signe moins. Le point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3, -x_4, -x_5, -x_6, -x_7)$ représente ainsi un bilan de production possible de l'usine. Mais il y en a bien d'autres, car l'usine peut fonctionner de bien des façons. En les représentant chacun par un point, on obtient une partie de $\mathbb{R}^7$, appelée l'ensemble de production.

Chaque unité de production j est ainsi caractérisée par son *ensemble de production* Y_j, contenu dans l'espace des biens $\mathbb{R}^l$. Tout point $(y_1, \ldots, y_l)$ de Y_j représente un mode de fonctionnement possible ; les coordonnées négatives sont les entrées, les coordonnées positives les sorties, les coordonnées nulles les autres biens. On remarquera que nous avons abandonné la convention des chapitres précédents, suivant laquelle les coordonnées d'un panier de biens étaient toujours positives ou nulles. Ceci ne concerne bien entendu que les producteurs ; les consommateurs, quant à eux, ne peuvent se voir affecter que des quantités positives ou nulles de chaque bien.

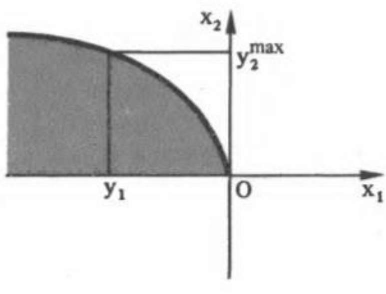


FIGURE IV.2

Un ensemble de production Y (grisé) dans le cas de deux biens.

J'ai beaucoup insisté sur les limites de cette notion. Il convient maintenant de souligner sa souplesse d'utilisation, que je vais illustrer par quelques exemples. Commençons par le cas où il n'y a que deux biens, tous deux désirés, l'un en entrée l'autre en sortie. Un ensemble de production tel que celui de la figure IV.2 indique que l'entreprise produit du bien 2 à partir du bien 1. On remarquera que les points de Y ayant une coordonnée $y_1 < 0$ donnée forment tout un segment de droite, allant du point $(y_1, 0)$ au point (y_1, y_2^{max}). Cela signifie qu'à partir d'une même quantité $x_1 = -y_1$ de bien 1, on peut produire des quantités différentes de bien 2, de zéro jusqu'à y_2^{max}. Il est clair que ce dernier mode de production, représenté par le point (y_1, y_2^{max}), tire le maximum des possibilités techniques. Au contraire, le mode de production représenté par le point $(y_1, 0)$ manifeste une gabegie totale, puisqu'on assiste à une disparition pure et simple du bien 1, sans contrepartie en bien 2. Entre ces deux extrêmes s'étalent tous les degrés du gaspillage.

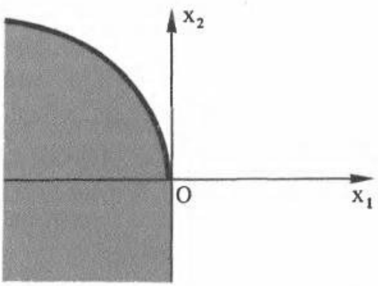


FIGURE IV.3

Un autre type d'ensemble de production Y (hachuré) dans le cas de deux biens.

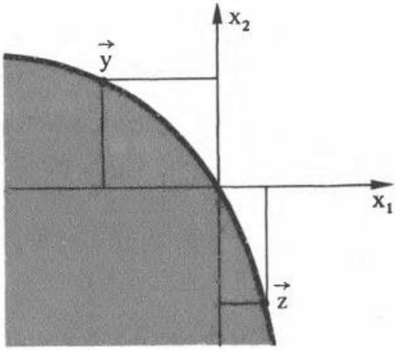


FIGURE IV.4

Un troisième type d'ensemble de production (hachuré) dans le cas de deux biens.

Si maintenant l'ensemble de production est celui de la figure IV.3, les possibilités vont se trouver étendues à tous les points (y_1, y_2) dont les deux coordonnées sont négatives. Cela signifie que les deux biens peuvent jouer le rôle d'entrées, sans qu'il y ait de sortie correspondante. Il s'agit donc d'une destruction simultanée de ceux-ci. On dit que l'entreprise a la libre disposition des biens 1 et 2 : elle peut en détruire des quantités quelconques, en circuit fermé, sans consommations supplémentaires ni productions parasites. Enfin, si l'ensemble de production a l'allure décrite par la figure IV.4, cela signifie essentiellement que le fonctionnement est réversible : l'entreprise peut produire du bien 2 à partir de bien 1 (point $\vec{y}$), ou du bien 1 à partir de bien 2 (point $\vec{z}$).

Passons alors au cas de trois biens. Imaginons par exemple qu'une usine produise du bien 3 en combinant, dans une proportion *c* fixée, du bien 1 et du bien 2. Le processus est donc régi par une équation du type

$$y_3 = -k\,y_1 = -k\,c\,y_2, \qquad (1)$$

pourvu que $y_1 \,/\, y_2 = c$ (attention aux signes : y_1 et y_2, en entrée, sont négatifs, y_3, en sortie, est positif). Si $-y_1 > -c\,y_2$, il y a en trop une quantité $-y_1 + c\,y_2$ de bien 1. Elle est inutilisable dans le processus de production, et tout ce que l'usine peut en faire, c'est de s'en débarrasser. De même, si $-c\,y_2 > -y_1$, il y a un excédent inutilisable $-y_2 + \frac{1}{c}\,y_1$ de bien 2. Si l'on accorde à l'usine la libre disposition de tous les biens, en particulier la faculté de détruire les excédents, l'ensemble de production aura pour équation :

$$y_3 + k\,y_1 \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad y_3 \geqslant 0, \quad y_1 - c\,y_2 \geqslant 0$$

$$y_3 + k\,c\,y_2 \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad y_3 \geqslant 0, \quad c\,y_2 - y_1 \geqslant 0$$

$$y_1 \leqslant 0, \quad y_2 \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad y_3 \leqslant 0.$$

Il est représenté sur la figure IV.5. On remarquera que, à la différence des exemples précédents, cet ensemble de production n'est pas lisse : il présente quatre arêtes, les trois demi-axes négatifs O x_1, O x_2 et O x_3, et la demi-droite d'équation $y_1 = c\,y_2$, $y_3 + k\,y_1 = 0$, $y_3 \geqslant 0$.

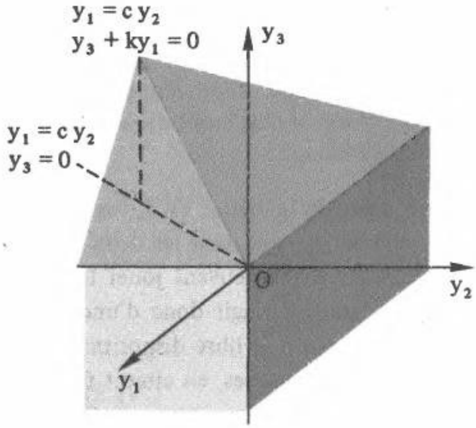


FIGURE IV.5

Un ensemble de production polyedral, pour $l = 3$. On a hachuré de manières différentes ses quatre faces.

On voit apparaître sur ces exemples certaines propriétés de nature plus générale. Remarquons d'abord que nous n'avons eu affaire qu'à des ensembles fermés. Nous ferons l'hypothèse générale que les ensembles de production sont fermés dans l'espace des biens ; elle permet d'éviter les complications mathématiques, tout en étant dépourvue de signification économique particulière.

Remarquons aussi que ces divers ensembles contiennent l'origine O. Celle-ci représente l'inactivité, toutes les entrées et les sorties sont nulles : $y_k = 0$ quel que soit k. Dire que l'ensemble de production contient l'origine signifie simplement que l'inactivité est possible, voire que l'entreprise peut fermer. C'est une hypothèse raisonnable, que nous ferons dorénavant. Mais l'origine doit être le seul point commun à l'ensemble de production Y et au cône positif $\mathbb{R}^l_+$. En effet, un point $(y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0)$ de l'ensemble Y, avec $y_1 > 0, \ldots, y_r > 0$, représenterait une production à partir de rien. Les *r* premiers biens sont les sorties, ils sont produits en quantité non nulle, mais il n'y a pas d'entrées correspondantes. Il ne s'agit plus alors de production à proprement parler, mais d'une manne qui tombe du ciel, d'un pur don de la nature. En outre, si $Y \cap \mathbb{R}^l_+$ contient plus d'un point (autre que l'origine), cela signifie que l'on peut régler le niveau de ces largesses. Nous écarterons dorénavant ces cas, au motif que toute production nécessite du travail, si peu que ce soit. Sinon celui de l'ouvrier, du moins celui du gestionnaire de l'entreprise, ou du dispensateur des largesses de la nature.

Le modèle exclura donc que l'on puisse produire à partir de rien. Par contre, il admettra que l'on puisse produire beaucoup à partir de fort peu. Si l'on désire exclure ce type de fonctionnement (et ce sera nécessaire au § 3, pour obtenir des équilibres), il faudra supposer que l'ensemble de production Y est *convexe*.

La signification de cette hypothèse est particulièrement claire dans le cas de deux biens. Dans les figures IV.6 et IV.7, l'ensemble de production est convexe.

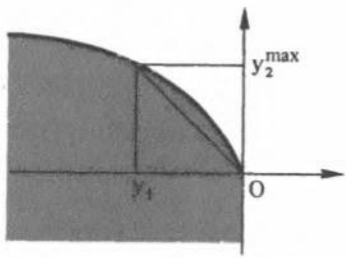


FIGURE IV.6

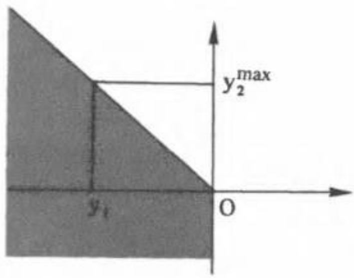


FIGURE IV.7

FIGURES IV.6 et IV.7

$l = 2$. Deux exemples d'ensembles de production *convexes*.

Cela implique que le rapport $y_2^{max} / - y_1$ décroît quand $- y_1$ tend vers $+ \infty$ (il reste même constant dans le second). Or, ce rapport $\frac{\text{quantité produite}}{\text{quantité utilisée}}$ n'est autre que le rendement maximal possible en employant $- y_1$ en entrée. Le rendement décroît donc (ou reste constant) avec la quantité utilisée. En particulier il ne risque pas de tendre vers l'infini. Par contre, dans les figures IV.8 et IV.9, l'ensemble de production n'est plus convexe. Le rapport $y_2^{max} / - y_1$ oscille dans le premier cas, et croît dans le second. Il n'est plus possible d'affirmer que le rendement est limité. Dans le second cas, en particulier, le rendement croît vers $+ \infty$ avec la quantité utilisée ; c'est le cas que nous mentionnions tout à l'heure, où l'on produit beaucoup à partir de relativement peu. La fabrication en grande série, le travail à la chaîne, conduisent à des ensembles de production de ce type. Les branches d'industrie où elles fleurissent sont justement celles où la concentration de l'activité entre les mains de quelques entreprises est la plus marquée : automobile, métallurgie, hôtellerie. C'est que les rendements croissants favorisent les gros producteurs aux dépens des petits : le coût à l'unité sera moindre pour les premiers que pour les seconds.

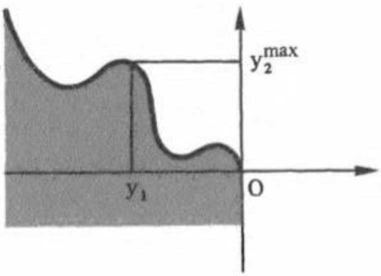


FIGURE IV.8

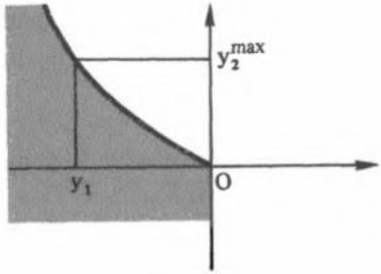


FIGURE IV.9

FIGURES IV.8 et IV.9

$l = 2$. Deux exemples d'ensembles de production *non convexes.*

Revenons au cas général, où l'espace des biens est de dimension *l*. Supposons que l'ensemble de production Y soit convexe et contienne l'origine O. Alors, quel que soit le vecteur $\vec{y}$ de Y et le nombre t compris entre 0 et 1 le vecteur $t\,\vec{y}$ appartiendra encore à Y. Supposons pour simplifier que les r premières composantes de $\vec{y}$ sont positives et les $(l - r)$ dernières négatives. L'interprétation économique est alors lumineuse : s'il est techniquement possible de produire $(y_1, \ldots, y_r)$ en utilisant $(-y_{r+1}, \ldots, -y_l)$, il sera également possible de produire $(t\,y_1, \ldots, t\,y_r)$ en utilisant $(-t\,y_{r+1}, \ldots, -t\,y_l)$. En d'autres termes, le processus de production se laisse réduire à une échelle quelconque. Il est possible de fonctionner avec des entrées et des sorties réduites de moitié. Cela n'empêche pas qu'on puisse faire mieux : avec une entrée diminuée de moitié, assurer une sortie diminuée seulement d'un tiers, ou d'un quart. Tout dépend de la forme de l'ensemble de production. La convexité de celui-ci implique seulement qu'on peut, sinon augmenter, du moins maintenir les rendements en diminuant le niveau global d'activité.

La convexité a d'autres conséquences encore. Mathématiquement, elle signifie que si deux vecteurs $\vec{y}$ et $\vec{z}$ appartiennent à Y, il en est de même de $t\,\vec{y} + (1-t)\,\vec{z}$ pour tout nombre t compris entre zéro et un. Economiquement, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ représentent deux modes de fonctionnement de l'entreprise. L'hypothèse de convexité signifie qu'il est possible de les combiner dans des proportions quelconques. En prenant $t = \frac{1}{2}$ par exemple, on obtient un troisième mode de fonctionnement, techniquement possible si les deux autres le sont. On com-

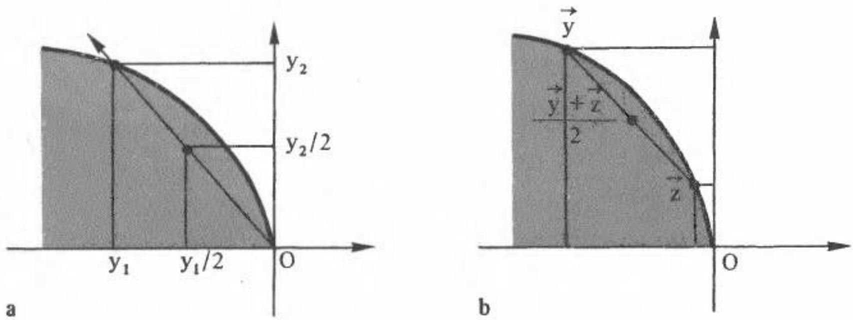


FIGURE IV.10

Deux propriétés liées à la convexité : (a) réduction à l'échelle 1/2 d'un mode de production; (b) combinaisons à parties égales de deux modes de production.

bine moitié / moitié les entrées de $\vec{y}$ et de $\vec{z}$, et on s'arrange pour récupérer les sorties de $\vec{y}$ et de $\vec{z}$ dans les mêmes proportions. Tout se passe comme si l'entreprise pouvait se scinder en deux filles, chacune étant l'image de sa mère à l'échelle 1/2, mais fonctionnant l'une suivant le mode $\vec{y}$ / 2, l'autre suivant le mode $\vec{z}$ / 2. Une telle souplesse n'est évidemment pas courante, et évoque plutôt un conglomérat de petits producteurs qu'une grande entreprise.

Bien entendu, si l'on combine $\vec{y}$ avec $\vec{z} = \vec{0}$, on obtient le vecteur $t\,\vec{y}$, où t est compris entre 0 et 1. C'est la situation décrite ci-dessus, lors de l'étude des rendements. On en tire même une suggestion pour la réalisation pratique du mode de fonctionnement $t\,\vec{y}$: mettre en sommeil une partie $(1 - t)$ de l'entreprise, le reste fonctionnant suivant le mode $\vec{y}$. Ces deux propriétés : divisibilité de la production et décroissance des rendements [1] ne sont que deux facettes d'une même réalité, exprimée de façon commode par la convexité de l'ensemble de production. Les idées économiques prennent un corps géométrique. Nous allons voir un dernier exemple de cette démarche.

Supposons maintenant fixé un système de prix $(p_1, \ldots, p_l)$ pour les différents biens. Ce sont les prix auxquels le producteur se fournit en entrées et écoule ses sorties. Soit $\vec{y} \in Y$ son vecteur de production ; nous supposerons pour simplifier les *r* premières coordonnées positives et les autres négatives. Son coût de production est alors

$$- p_{r+1}\, y_{r+1} - \cdots - p_l\, y_l$$

et son chiffre d'affaires :

$$p_1\, y_1 + \ldots + p_r\, y_r.$$

Son profit n'est autre que leur différence : (chiffre d'affaires) – (coût de production), ou, si l'on préfère (prix de vente) – (prix de revient). Il s'exprime par la formule très simple :

$$p_1\, y_1 + \ldots + p_r\, y_r + p_{r+1}\, y_{r+1} + \ldots + p_l\, y_l = \langle \vec{p}, \vec{y} \rangle. \qquad (2)$$

Le profit du producteur apparaît donc comme une forme linéaire, dont les coefficients $p_1, \ldots, p_l$ sont fixés et qui opère sur les vecteurs de production $\vec{y} \in Y$. Par exemple, si tous les prix doublent et si le mode de fonctionnement, représenté par $\vec{y}$, est inchangé, le profit doublera. Le mot profit ne doit d'ailleurs pas faire illusion : il se peut fort bien que $\langle \vec{p}, \vec{y} \rangle$ soit négatif, auquel cas il vaudrait mieux parler de perte.

(1) Les rendements varient en sens inverse du niveau d'activité : ils décroissent (ou restent constants) quand les entrées croissent.

Il est plus intéressant de comparer les profits $<\vec{p}, \vec{y}>$ associés aux divers vecteurs $\vec{y}$ d'un ensemble de production Y donné. Bien entendu, l'appareil géométique que nous avons construit nous amène inéluctablement à rechercher le vecteur de production $\vec{y}$ assurant le profit le plus élevé. De là à dire que c'est le meilleur mode de fonctionnement, et celui que choisira le producteur, il n'y a qu'un pas, que nous franchirons allègrement. Il ne faut toutefois pas se dissimuler qu'il s'agit d'une hypothèse de comportement, et non d'une nécessité logique. On ne saurait décréter que les producteurs cherchent à maximiser leur profit, sans les consulter. Malheureusement, les ressorts de la vie économique sont plus cachés que ceux des machines mathématiques, et les mobiles des chefs d'entreprises sont loin d'être clairs. Ils se défendraient plutôt de chercher à tout prix le profit maximum ! Certainement, d'autres considérations peuvent jouer, humaines, sociales, voire politiques. Par ailleurs, plus l'entreprise est importante, plus le profit est difficile à définir : c'est une notion comptable, qui dépend de la manière dont les amortissements sont pris en compte, et de beaucoup d'autres facteurs. Bref, dans la gestion des entreprises, le profit serait un serviteur plutôt qu'un maître, un moyen plutôt qu'un critère.

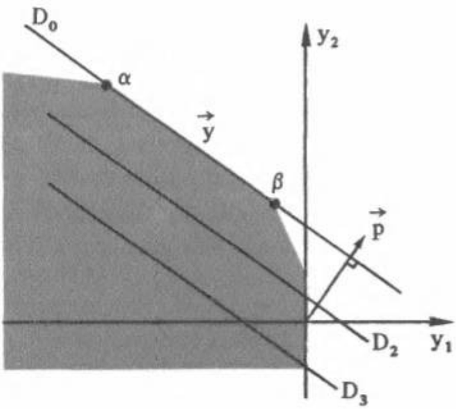


FIGURE IV.11

Le profit du producteur : Le système de prix $\vec{p}$ est indiqué, et le profit réalisé par le vecteur de production $\vec{y}$ n'est autre que le produit scalaire $<\vec{p}, \vec{y}>$. Il est constant sur toutes les droites D perpendiculaires à $\vec{p}$: négatif sur D_3 (c'est donc une perte), positif sur D_2, maximum sur D_0. L'ensemble $\Gamma(\vec{p})$ est le segment $\alpha\beta$.

En dépit de ces objections, la maximisation du profit est certainement une bonne approximation du comportement des producteurs. C'est la règle la plus simple, celle qui leur est la plus généralement attribuée, et on n'en voit pas qui puisse la remplacer. La théorie néo-classique affirme donc que, pour un système de prix donné $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_l)$, seuls seront retenus le ou les vecteurs de l'ensemble de production Y pour lesquels $<\vec{p}, \vec{y}>$ est maximum. Nous noterons $\Gamma(\vec{p})$ cet ensemble :

$$\Gamma(\vec{p}) = \{ \vec{y} \in Y \mid <\vec{p}, \vec{y}> \geqslant <\vec{p}, \vec{z}> \quad \forall \vec{z} \in Y \} \tag{3}$$

A tout système de prix $\vec{p} \in \mathbb{R}^l$ on associe une partie $\Gamma(\vec{p})$ de l'espace des biens $\mathbb{R}^l$: c'est *l'offre du producteur.* On remarquera qu'elle n'est pas affectée par le niveau global des prix : si tous les prix doublent simultanément, ils suffit de multiplier par deux chaque membre de l'inégalité de définition (3). Plus généralement :

$$\forall\, t > 0, \Gamma(t\vec{p}) = \Gamma(\vec{p}). \tag{4}$$

On. remarquera que l'on a affaire à une correspondance : à tout $\vec{p} \in \mathbb{R}^l$, on associe un ensemble $\Gamma(\vec{p})$. En d'autres termes, pour un système de prix donné, l'application du critère de maximisation du profit fournit un ensemble de vecteurs, $\vec{y} \in \Gamma(\vec{p})$, entre lesquels choisir. Il ne permet pas de trancher plus avant. Deux types de problèmes peuvent alors se poser :

(a) l'ensemble $\Gamma(\vec{p})$ est vide. Dans ce cas, le critère adopté est trop strict : aucun vecteur de production n'y satisfait. Cela peut se produire si, par exemple, il n'y a pas de limite aux profits possibles : pour tout $\vec{y} \in Y$ il y a un $\vec{x} \in Y$ tel que $<\vec{p}, \vec{x}> \, > \, <\vec{p}, \vec{y}>$;

(b) l'ensemble $\Gamma(\vec{p})$ contient plus d'un point. Dans ce cas, le critère adopté est insuffisant. Le producteur devra se déterminer entre les divers $\vec{y}$ de $\Gamma(\vec{p})$ en faisant appel à d'autres considérations. En d'autres termes, le modèle ne rend compte qu'incomplètement de la conduite du producteur. Ses décisions ne sont prévues qu'avec une certaine ambiguïté, d'autant plus grande que l'ensemble $\Gamma(\vec{p})$ est plus étendu.

Ces diverses situations apparaissent clairement dans le cas de deux biens. Soit donc une entreprise produisant du bien 2 à partir de bien 1 ; si l'entrée est $y_1 \leqslant 0$, la sortie sera au plus $y_2 = f(y_1) \geqslant 0$. La fonction $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ décrit le fonctionnement à plein rendement ; l'entreprise peut sans doute produire moins que $f(y_1)$, pour une entrée y_1 donnée, mais il est techniquement impossible de produire davantage. Si l'on accorde à l'entreprise la libre disposition des biens, son ensemble de production sera constitué des points du plan $\mathbb{R}^2$ situés en dessous du graphe de f :

$$Y = \{ (y_1, y_2) \mid y_1 \leqslant 0, y_2 \leqslant f(y_1) \}.$$

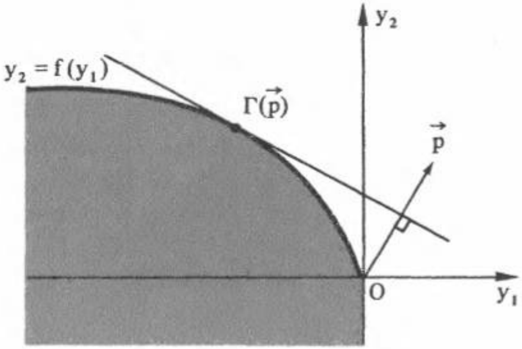


FIGURE IV.12

Le cas le plus simple : la correspondance d'offre Γ $(\vec{p})$ est un singleton (réduite à un point quel que soit $\vec{p}$). L'ensemble Y est limité par le graphe de f, fonction de production.

Nous retrouverons cette fonction f au paragraphe quatre, sous le nom de fonction de production. En attendant, considérons le cas où $f(y_1) = -a\,y_1$, avec $a \geqslant 0$. Cela veut dire que les quantités de bien 2 que l'entreprise peut produire sont proportionnelles aux disponibilités en bien 1 : le rendement est constant et égal à *a* (sous réserve que l'on utilise au mieux les possibilités techniques). C'est un cas d'une grande importance théorique, en raison de sa simplicité, et c'est malheureusement aussi un cas qui relève des problèmes (a) et (b).

Fixons en effet un système de prix $(p_1, p_2) \in \Pi$ et proposons-nous de maximiser le profit $p_1\,y_1 + p_2\,y_2$ sur l'ensemble de production. On peut raisonner directement sur figure : il s'agit alors de chercher, dans la famille de droites parallèles $p_1\,y_1 + p_2\,y_2 = c$, tracées dans le plan et rencontrant Y, celle pour qui *c* est le plus grand, c'est-à-dire la plus haut placée. On peut aussi formuler le problème analytiquement :

$$\begin{cases} \text{maximiser } p_1\,y_1 + p_2\,y_2 \\ \text{pour } y_1 \leqslant 0 \text{ et } y_2 \leqslant -a\,y_1 . \end{cases}$$

Comme p_2 est positif, on a intérêt, pour une entrée y_1 donnée, à choisir y_2 le plus grand possible, c'est-à-dire égal à $-a\,y_1$. Le problème devient alors :

$$\text{maximiser } (p_1 - a\,p_2)\,y_1, \text{ pour } y_1 \leqslant 0.$$

Trois situations se présentent, illustrées par les figures 13 (*i*), (*ii*) et (*iii*).

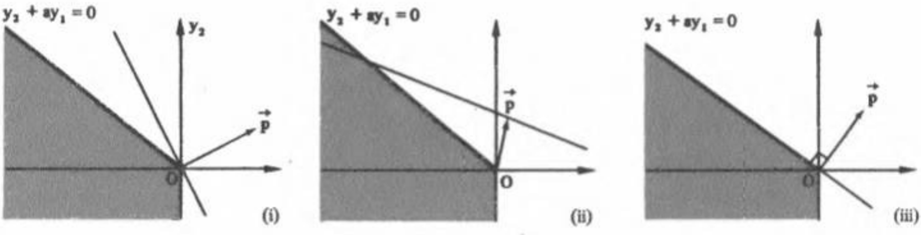


FIGURE IV.13

Cas d'une fonction de production linéaire : les trois situations possibles relativement au système de prix $\vec{p}$.

(i) ou bien $p_1 - a\,p_2 > 0$. Le « profit » est alors négatif, c'est-à-dire que l'entreprise fonctionne à perte. Le déficit est proportionnel à l'entrée y_1 ; le profit maximum, c'est-à-dire le déficit minimum, est réalisé pour $y_1 = 0$. En d'autres termes, le mieux que puisse faire l'entreprise est de fermer ses portes ;

(ii) ou bien $p_1 - a\,p_2 < 0$. La quantité $(p_1 - a\,p_2)\,y_1$ est alors positive, et représente bien un profit. Malheureusement pour nous (mais heureusement pour l'entrepreneur), ce profit est proportionnel à l'entrée y_1, c'est-à-dire au niveau d'activité : plus on produit et plus on y gagne. Il n'y a donc pas de limite aux profits possibles, ni de vecteur $\vec{y} \in Y$ maximisant : on a toujours intérêt à produire davantage encore. Nous venons de rencontrer le problème (a) ;

(iii) enfin, $p_1 - a\,p_2 = 0$. Le profit est alors nul, quelle que soit l'entrée y_1. L'entrepreneur n'est donc pas incité à en choisir une plutôt qu'une autre. La cessation d'activités ($y_1 = 0$), comme une production élevée ($-\,y_1$ très grand) sont également bonnes, et le modèle ne permet pas de trancher. Nous venons de rencontrer le problème (b).

La correspondance d'offre Γ résume ces résultats :

$$\Gamma(\vec{p}) = \left\{\vec{0}\right\} \text{ si } p_1 - a\,p_2 > 0$$

$$\Gamma(\vec{p}) = \phi \quad \text{ si } p_1 - a\,p_2 < 0$$

$$\Gamma(\vec{p}) = \left\{ (y_1, -a\,y_1) \mid y_1 \leqslant 0 \right\} .$$

Economiquement, il est très facile de comprendre ce qui se passe. Appelons le rapport p_1 / p_2 prix relatif du bien 1 (par rapport au bien 2). L'égalité du prix relatif au rendement, $p_1 / p_2 = a$, sépare alors la rentabilité $p_1 / p_2 < a$ (le prix du bien 1 est avantageux) de la non-rentabilité $p_1 / p_2 > a$ (le bien 1 coûte trop cher). On remarquera que dans le cas d'égalité, la maximisation du profit permet d'éliminer tous les modes de production inefficaces ($y_2 < - a\, y_1$), même si elle n'arrive pas à aller jusqu'au bout et déterminer le meilleur possible. Nous reviendrons sur ces considérations au paragraphe suivant, dans un cadre élargi.

Dans la suite, je ne chercherai point à éliminer systématiquement les problèmes (a) et (b) : ce serait dommage, puisque nous les avons vu apparaître dans des situations économiques très simples. Ainsi, le théorème d'existence que j'énoncerai pour les équilibres s'appliquera aussi à des situations analogues à celle que je viens de décrire. Il peut toutefois être bon d'avoir des conditions assurant que $\Gamma(\vec{p})$ est non vide, ou qu'il contient au plus un point. En voici d'assez naturelles :

PROPOSITION 1

Supposons que Y est fermé dans $\mathbb{R}^l$ *et vérifie la condition :*

$$[\vec{y}_n \in Y,\ \|\vec{y}_n\| \to \infty,\ \vec{y}_n / \|\vec{y}_n\| \to \vec{z}] \Rightarrow \vec{z} \in -\mathbb{R}^l_+. \tag{5}$$

Alors, pour tout système de prix strictement positifs, le profit atteint son maximum sur Y en un point au moins :

$$\forall \vec{p} \in \mathring{\mathbb{R}}^l_+,\ \Gamma(\vec{p}) \neq \phi.$$

DEMONSTRATION

Soit *a* (éventuellement $+\infty$) la borne supérieure des profits possibles :

$$a = \sup_{\vec{y} \in Y} \langle \vec{p}, \vec{y} \rangle \tag{6}$$

et soit $\vec{y}_n$ une suite de points de Y telle que :

$$\langle \vec{p}, \vec{y}_n \rangle \to a \qquad (^1). \tag{7}$$

Je dis que la suite $\vec{y}_n$ est bornée. Supposons un instant qu'il en soit autrement. On pourrait alors extraire une sous-suite, notée $\vec{y}_{n'}$, telle que $\|\vec{y}_{n'}\|$ tende vers

(1) La définition de *a* et l'existence de la suite $\vec{y}_n$ sont des résultats classiques sur les nombres réels.

l'infini. Les vecteurs $\vec{y}_{n'} / \| \vec{y}_{n'} \|$ seraient tous de norme un ; et la boule-unité de $\mathbb{R}^l$ est compacte. On pourrait donc extraire de nouveau une sous-suite, notée $\vec{y}_{n''}$, telle que $\vec{y}_{n''} / \| \vec{y}_{n''} \|$ converge vers un vecteur $\vec{z}$. D'après l'hypothèse (5), le vecteur $\vec{z}$ appartiendrait à $-\mathbb{R}^l_+$. Comme toutes les composantes de $\vec{p}$ sont strictement positives, le produit $< \vec{p}, \vec{z} >$ serait strictement négatif, et l'on aurait

$$< \vec{p}, \vec{y}_{n''} > = \| \vec{y}_{n''} \| < \vec{p}, \vec{y}_{n''} / \| \vec{y}_{n''} \| > \to -\infty. \tag{8}$$

En comparant les formules (7) et (8), on obtiendrait $a = -\infty$, ce qui est absurde. La suite $\vec{y}_n$ est donc bornée :

$$\exists c : \forall n \in \mathbb{N}, \| \vec{y}_n \| \leqslant c,$$

c'est-à-dire que tous les $\vec{y}_n$ sont contenus dans une boule fermée de rayon c. Comme celle-ci est compacte, on peut extraire une sous-suite convergente, notée $\vec{y}_{n'}$:

$$\exists \vec{u} : \vec{y}_{n'} \to \vec{u}. \tag{9}$$

Comme l'ensemble Y est fermé et contient les $\vec{y}_{n'}$, il contient leur limite $\vec{u}$. En outre, des formules (7) et (9), on déduit aisément que $< \vec{p}, \vec{u} > = a$. Grâce à la définition de *a* par la formule (6), on conclut que $\vec{u}$ maximise le produit $< \vec{p}, \vec{y} >$ pour $\vec{y} \in Y$.

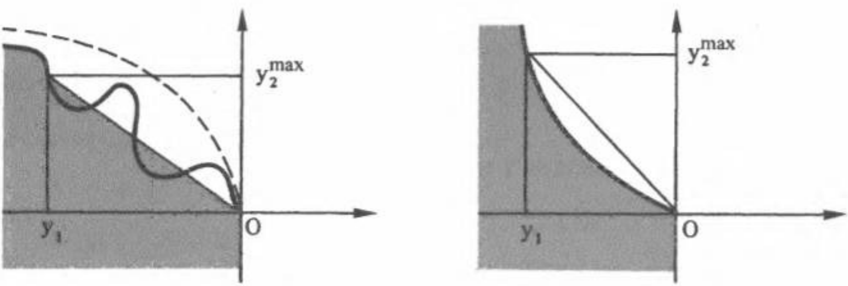


FIGURE IV.14

La condition (5) : satisfaite à gauche, non satisfaite à droite. Le rapport y_2^{max}/y_1 (rendement moyen) doit tendre vers zéro à mesure que y_1 grandit.

L'interprétation économique de la condition (5) n'est guère difficile. Le vecteur $\vec{z}$ représente le « rendement à l'infini » : quand le niveau d'activité de l'entreprise est très élevé ($\| \vec{y}_n \|$ très grand), les composantes de $\vec{z}$ sont à peu de choses près les proportions relatives des différents biens dans le bilan de production. Dire que $\vec{z}$ appartient à $-\mathbb{R}^l_+$ signifie que la colonne des sorties se vide progressivement au fur et à mesure que la production augmente. En d'autres termes, les rendements tendent vers zéro quand le niveau d'activité augmente.

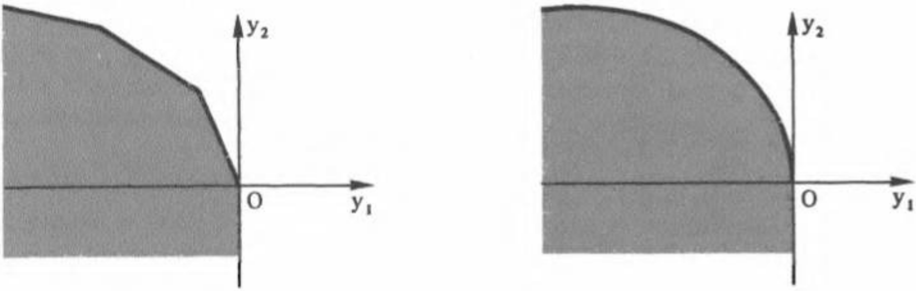


FIGURE IV.15

L'ensemble de gauche est convexe, mais non strictement convexe. L'ensemble de droite est strictement convexe.

L'intérieur de Y est l'ensemble des points que l'on peut entourer d'une boule ouverte entièrement contenue dans Y. Intuitivement, c'est l'ensemble Y privé de son bord. On le notera $\mathring{Y}$. Je dirai que l'ensemble Y est *strictement convexe* si, quels que soient les points $\vec{y}$ et $\vec{z}$ distincts de Y, le segment $]\,\vec{y}, \vec{z}\,[$ est contenu dans $\mathring{Y}$. En particulier, l'ensemble Y sera convexe, puisque $\mathring{Y}$ est lui-même contenu dans Y. En outre, seules les extrémités d'un segment contenu dans Y peuvent appartenir à son bord. Il n'y a pas de segment entièrement contenu dans le bord de Y. Intuitivement, ce dernier n'a pas de faces planes, ni d'arêtes rectilignes, ce qui va permettre d'établir l'unicité.

PROPOSITION 2

Supposons Y strictement convexe dans $\mathbb{R}^l$. Alors, quel que soit le système de prix, il ne saurait y avoir plus d'un point où le profit soit maximum :

$$\forall \vec{p} \neq \vec{0},\ [\vec{x} \in \Gamma(\vec{p}) \ \text{et}\ \vec{z} \in \Gamma(\vec{p})] \Rightarrow \vec{x} = \vec{z}.$$

DEMONSTRATION

Supposons qu'il y ait deux points distincts $\vec{x}$ et $\vec{z}$ dans $\Gamma_y(\vec{p})$:

$$\vec{x} \in Y, \vec{z} \in Y, <\vec{p}, \vec{x}> = a = <\vec{p}, \vec{z}>$$

$$a = \sup_{y \in Y} <\vec{p}, \vec{y}>.$$

Considérons le point $\vec{u} = (\vec{x} + \vec{z}) / 2$, milieu du segment $[\vec{x}, \vec{z}]$. On vérifie immédiatement que :

$$<\vec{p}, \vec{u}> = a.$$

En outre, puisque Y est strictement convexe, $\vec{u}$ est le centre d'une boule B, de rayon $\epsilon > 0$ assez petit, entièrement contenue dans Y. Comme $B \subset Y$, on a :

$$b = \sup_{y \in B} <\vec{p}, \vec{y}> \leqslant \sup_{y \in Y} <\vec{p}, \vec{y}> = a.$$

De la définition de B il ressort que :

$$b = <\vec{p}, \vec{u}> + \epsilon \, \|\vec{p}\| = a + \epsilon \, \|\vec{p}\|.$$

Nous avons démontré successivement que $b \leqslant a$ puis que $b > a$. C'est la contradiction désirée : il n'est pas possible de trouver deux points distincts dans $\Gamma_y(\vec{p})$.

Revenons pour finir à l'économie globale, regroupant, non pas une, mais plusieurs unités de production. Notons p leur nombre : il y aura donc p ensembles de production indépendants $Y_1, \ldots, Y_p$. Prenons n'importe quelle famille de vecteurs de production $\vec{y}_1 \in Y_1, \ldots, \vec{y}_p \in Y_p$; cela exprime que $\vec{y}_1$ est techniquement réalisable par la première unité de production, $\vec{y}_2$ par la seconde, et ainsi de suite. Si l'on admet que ces unités de production sont techniquement indépendantes, rien n'empêche de les faire fonctionner simultanément, le producteur Y_k suivant le mode $\vec{y}_k$ (pourvu, bien entendu, que l'approvisionnement soit assuré). Le bilan global, au niveau de l'économie, est alors représenté par la somme $\vec{y}_1 + \ldots + \vec{y}_p$ des vecteurs de production individuels. On l'appelle vecteur de production globale, et on est conduit à énoncer :

DEFINITION 3

Dans une économie à p producteurs $Y_1, \ldots, Y_p$, *l'ensemble de production globale* Y_s est la somme (1) des ensembles de production individuels :

$$
\begin{aligned}
Y_s &= Y_1 + \ldots + Y_p \\
&= \left\{ \vec{y}_1 + \ldots + \vec{y}_p \mid \vec{y}_k \in Y_k, 1 \leqslant k \leqslant p \right\}.
\end{aligned}
$$

Il est clair que Y_s héritera beaucoup de propriétés des ensembles de production individuels. Si ceux-ci satisfont à la condition (5), il en sera de même de Y_s; s'ils sont strictement convexes, il en sera de même de Y_s. Il y a toutefois des hypothèses que l'on préfère faire directement sur l'ensemble de production global. C'est sur l'une de celles-ci que nous terminerons : on dit qu'il y a *libre disponibilité des biens* dans l'économie si Y_s contient l'orthant négatif :

$$
Y_s \supset -\mathbb{R}^l_+. \tag{10}
$$

Un vecteur de $-\mathbb{R}^l_+$ a ses coordonnées toutes négatives, et représente donc un mode de fonctionnement où il n'y a que des entrées et pas de sortie – comme la caverne du lion de la fable, où nombre de traces entraient, mais dont nulle ne sortait. Il s'agit en fait de la destruction pure et simple du panier de biens indiqué (au signe près). L'hypothèse (10) signifie donc que l'économie dans son ensemble peut détruire librement des quantités quelconques de biens.

C'est une hypothèse très forte, puisqu'elle permet l'élimination immédiate des biens non désirés : plus de pollution, plus de nuisances, on met les fumées et les déchets ensemble dans un grand sac, et ils se détruisent tout seul. Ceci fait, on est ramené à une situation où tous les biens sont désirés. En ce sens, l'hypothèse de libre disponibilité des biens remplace l'hypothèse de monotonie des préférences, que nous avions faite au chapitre précédent. L'une ou l'autre permet de se limiter à des systèmes de prix positifs. Les prix négatifs n'ont plus de raison d'être : ils représentent des barèmes de dédommagement pour faire accepter les nuisances. Qu'il n'y ait pas de nuisances, ou qu'on puisse les éliminer gratuitement, et il n'y a plus matière à dédommagement. C'est ce qui se passera dans la suite, où nous ferons l'hypothèse (10) et supposerons les prix positifs.

---

(1) Ne pas confondre avec la réunion !

2. Optima de Pareto

Nous voici maintenant devant une économie plus complexe, puisqu'elle regroupe des consommateurs et des producteurs. Les premiers sont caractérisés par leur fonction d'utilité u_i, $1 \leqslant i \leqslant m$; les seconds par leur ensemble de production Y_k, $1 \leqslant k \leqslant p$. Nous supposerons, comme aux chapitres II et III, que chacune des fonctions d'utilité u_i est continue et vérifie l'hypothèse (H1) : elle ne dépend que de $\vec{x}^i$. Pouvons-nous retracer le chemin déjà parcouru, retrouver les optima de Pareto, puis de là les équilibres de Walras ? Attaquons-nous à la première partie : comment définir les optima de Pareto dans ce nouveau contexte ?

Soit $\vec{\Omega} \in \mathbb{R}^l_+$ les ressources totales de l'économie. Vu la question posée, je ne les suppose pas réparties entre les agents : nous n'avons pas affaire encore à une économie de propriété privée. Pour l'instant, il s'agit seulement d'une société S, mettant en commun les ressources initiales et les capacités de production. Ces dernières sont représentées par l'ensemble $Y_s = Y_1 + \ldots + Y_p$, contenu dans $\mathbb{R}^l$. Elles augmentent considérablement les possibilités d'action de la collectivité. Une allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ sera réalisable s'il est possible de produire le panier de biens $\vec{x}^1 + \ldots + \vec{x}^m$, à partir des ressources $\vec{\Omega}$, et à l'aide des capacités techniques Y_s. Par définition de l'ensemble de production, cela se traduit par l'équation :

$$\vec{x}^1 + \ldots + \vec{x}^m - \vec{\Omega} \in Y_s. \tag{1}$$

Le premier membre exprime le bilan global de l'économie : les ressources initiales ont été employées à produire, et les fruits ont été répartis entre les consommateurs. Que l'on compare ceci à la définition que j'avais donnée au paragraphe I.3. Il n'y avait pas alors de production, et les consommateurs ne pouvaient que se partager les ressources totales. Cela se traduisait par l'égalité :

$$\vec{x}^1 + \ldots + \vec{x}^m = \vec{\Omega}. \tag{2}$$

Remarquons qu'on peut recréer cette situation en choisissant dans Y_s le vecteur $\vec{0}$: la formule (1) prend alors $\vec{0}$ comme second membre, et se réduit à la formule (2). Il est bien clair qu'en mettant toutes les entreprises en cessation d'activité, on recrée les conditions d'une économie sans production.

Nous énoncerons donc :

DEFINITION 1

L'ensemble des *allocations réalisables* pour une économie dont les ressources totales sont $\vec{\Omega}$ et l'ensemble de production Y_s, est donné par

$$\mathcal{R} = \left\{ (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathbb{R}_+^{lm} \mid \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i \in \vec{\Omega} + Y_s \right\}. \tag{3}$$

A partir de maintenant, nous nous retrouvons dans la situation du chapitre I : il s'agit de trouver un critère pour comparer entre elles des allocations réalisables. Là encore, il faut se rabattre sur le critère de l'unanimité, exprimé dans la notion d'optimum de Pareto. La définition de ceux-ci est inchangée depuis le paragraphe I.5 ; je me borne à la recopier, en tenant compte de l'hypothèse (H1) (égoïsme des préférences).

DEFINITION 2

Une allocation réalisable $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est un *optimum de Pareto strict* si :

$$[\forall\, i, \vec{y}^i \succsim_i \vec{x}^i \text{ et } \exists\ j : \vec{y}^j \succ_j \vec{x}^j] \Rightarrow (\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m) \notin \mathcal{R}. \tag{P}$$

C'est un *optimum de Pareto faible* si :

$$[\forall\, i, u_i(\vec{y}^i) > u_i(\vec{x}^i)] \Rightarrow (\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m) \notin \mathcal{R}. \tag{P'}$$

Je ne reviendrai pas sur la signification de cette définition, qui a été abondamment discutée au paragraphe I.5. La seule différence réside dans la définition de $\mathcal{R}$. Cette identité formelle reflète une similitude profonde : ici comme là, la décision est remise entre les mains des consommateurs. A ce stade, les producteurs sont absents. Ils ne participeront qu'à la mise en œuvre, quand les consommateurs auront arrêté une allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, et qu'il faudra bien la réaliser. Les producteurs apparaissent donc ici comme les instruments des consommateurs, sans vœux à émettre ni voix au chapitre. En d'autres termes, les unités de production sont gérées directement par les consommateurs, en vue de leurs intérêts, manifestés par leurs fonctions d'utilité. Dès le prochain paragraphe, nous introduirons la propriété privée des ressources initiales, et les producteurs obtiendront leur autonomie. Il y aura des décisions de production, indépendantes des décisions de consommation.

En attendant, les ressources initiales et les capacités de production sont mises en commun, au service de l'ensemble des consommateurs. Peut-on trouver des optima de Pareto ? C'est la première question qui se pose. La réponse passe par une étude préalable de l'ensemble $\mathcal{R}$ des allocations réalisables.

PROPOSITION 3

Supposons que l'ensemble de production global Y_s soit fermé et que, pour toute suite $\vec{y}_n \in Y$ telle que $\|\vec{y}_n\|$ tende vers l'infini, on ait :

$$[\vec{y}_n / \|\vec{y}_n\| \to \vec{u} \text{ et } \vec{u} \in \mathbb{R}^l_+] \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}. \tag{4}$$

Alors l'ensemble $\mathcal{R}$ des allocations réalisables est fermé borné dans $\mathbb{R}^{lm}$.

DEMONSTRATION

Revenons à la formule (3). Il s'agit de montrer que l'ensemble $\mathcal{R}$ est compact. Je vais donc prendre une suite quelconque $(\vec{x}^1_n, \ldots, \vec{x}^m_n)$ d'éléments de $\mathcal{R}$, et montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergente.

Notons $\vec{e}_n$ le vecteur $(\vec{x}^1_n + \ldots + \vec{x}^m_n)$. Dire qu'on a affaire à une allocation réalisable signifie que les $\vec{x}^i_n$ appartiennent à $\mathbb{R}^l_+$ et que :

$$\vec{e}_n = \vec{\Omega} + \vec{y}_n, \text{ avec } \vec{y}_n \in Y_s. \tag{5}$$

La suite $\vec{e}_n$ appartient à $\mathbb{R}^l_+$. Si elle n'était pas bornée, on pourrait en extraire une sous-suite $\vec{e}_{n'}$ telle que $\|\vec{e}_{n'}\|$ tende vers l'infini. Mais les vecteurs $\vec{e}_{n'} / \|\vec{e}_{n'}\|$ sont tous de norme unité et de composantes positives. L'ensemble U $= \{\vec{u} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \|u\| = 1\}$ est fermé borné, donc compact. On peut donc extraire une nouvelle sous-suite $\vec{e}_{n''}$ telle que $\vec{e}_{n''} / \|\vec{e}_{n''}\|$ converge vers un vecteur $\vec{u} \in U$. D'après la formule (5), on aura :

$$\vec{e}_{n''} / \|\vec{e}_{n''}\| = \vec{\Omega} / \|\vec{e}_{n''}\| + \vec{y}_{n''} / \|\vec{e}_{n''}\|. \tag{6}$$

Comme $\|\vec{e}_{n''}\|$ tend vers l'infini, le premier terme de droite tend vers zéro. En prenant les normes des deux membres, on montre que $\|\vec{y}_{n''}\| / \|\vec{e}_{n''}\|$ tend vers 1. En passant à la limite dans la formule (6), on obtient :

$$\vec{y}_{n''} / \|\vec{y}_{n''}\| \to \vec{u}. \tag{7}$$

D'après l'hypothèse (4), le vecteur $\vec{u}$, s'il appartient à $\mathbb{R}^l_+$, doit être nul. Or il appartient à U, c'est-à-dire qu'il appartient à $\mathbb{R}^l_+$ et que sa norme est un. D'où une contradiction.

La suite $\vec{e}_n$ doit donc être bornée. D'après la formule (5), la suite $\vec{y}_n$ le sera aussi. D'après l'égalité $\vec{e}_n = \vec{x}^1_n + \ldots + \vec{x}^m_n$, chacune des suites $\vec{x}^i_n$ le sera aussi. En effet, chacune des composantes de $\vec{e}_n$ est majorée par une constante C ; mais c'est la somme des composantes correspondantes des $\vec{x}^i_n \in \mathbb{R}^l_+$, $1 \leqslant i \leqslant m$, qui sont toutes positives ; chacune d'elles est donc majorée par C.

On peut donc extraire des sous-suites $\vec{y}_{n'}$ et $\vec{x}^i_{n'}$, convergeant respectivement vers $\vec{y} \in Y_s$ et $\vec{x}^i \in \mathbb{R}^l_+$. En passant à la limite dans les égalités :

$$\vec{x}^1 + \ldots + \vec{x}^m = \lim \vec{e}_{n'} = \vec{\Omega} + \vec{y}.$$

Donc la limite $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est bien une allocation réalisable.

L'hypothèse (4) a une interprétation économique assez claire : les entrées doivent croître en proportion des sorties. Il est exclu de produire toujours davantage, en présentant des bilans de plus en plus favorables, la colonne des sorties se gonflant démesurément, et la colonne des entrées se réduisant pratiquement à néant. Dans le cas de deux biens, cela signifie simplement que le rendement (quantité produite) / (quantité utilisée) ne doit pas tendre vers l'infini avec le niveau d'activité. Par exemple si l'ensemble de production est convexe, le rendement est décroissant, et ne saurait donc tendre vers l'infini. En est-il de même quand il y a plus de deux biens ? C'est effectivement le cas :

PROPOSITION 4

Supposons que l'ensemble de production global Y_s soit convexe fermé, contienne l'origine mais aucun autre point de $\mathbb{R}^l_+$:

$$Y_s \cap \mathbb{R}^l_+ = \left\{ \vec{0} \right\}. \tag{8}$$

Alors l'ensemble $\mathcal{R}$ des allocations réalisables est convexe compact.

DEMONSTRATION

La convexité se déduit immédiatement de la formule (3). Quant à la compacité, il suffit de vérifier que l'hypothèse (4) est satisfaite. Soit donc $\vec{y}_n$ une suite de Y_s, vérifiant :

$$\| \vec{y}_n \| \to \infty \text{ et } \vec{y}_n / \| \vec{y}_n \| \to \vec{u} \in \mathbb{R}^l_+.$$

L'ensemble Y_s contient l'origine $\vec{0}$ et le vecteur $\vec{y}_n$. Comme il est convexe, il contient tout le segment $[\vec{0}, \vec{y}_n]$. En particulier, il contiendra le point $\vec{y}_n / \|\vec{y}_n\|$ puisque $1 / \|\vec{y}_n\|$ tend vers zéro.
L'ensemble Y_s contient toute la suite $\vec{y}_n / \|\vec{y}_n\|$. Comme il est fermé, il contient leur limite $\vec{u}$. De $\vec{u} \in Y_s$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^l_+$, on déduit que $\vec{u} = \vec{0}$ par l'hypothèse (8).

Il ne reste plus qu'à appliquer les résultats du paragraphe I.5, avec cette nouvelle définition de l'ensemble $\mathcal{R}$ des allocations réalisables. La seule chose qui importe pour les démonstrations est qu'il soit compact (prop. I.5.2) ou convexe compact (prop. I.5.3). On peut donc énoncer :

PROPOSITION 5

Hypothèses des propositions 3 ou 4. Pour toute allocation réalisable $(\vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^m)$, il existe un optimum de Pareto strict $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathcal{R}$ unanimement préféré :

$$\forall i, u_i(\vec{x}^i) \geqslant u_i(\vec{z}^i). \tag{9}$$

COROLLAIRE 6

Supposons en outre que Y_s contienne l'origine $\vec{0}$. Alors il existe dans $\mathcal{R}$ au moins un optimum de Pareto strict.

Effectivement, si $\vec{0} \in Y_s$, on est assuré que l'ensemble $\vec{\Omega} + Y_s$ rencontre le cône $\mathbb{R}^l_+$ au point $\vec{\Omega}$. L'ensemble $\mathcal{R}$ est donc non vide. Il ne reste plus qu'à y prendre une allocation réalisable $(\vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^m)$ et à lui appliquer la proposition 5.

Comme précédemment, nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des optima de Pareto stricts, et $\mathcal{P}'$ l'ensemble des optima de Pareto faibles. Nous savons à présent que $\phi \neq \mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$. Pour la suite du chapitre, nous aurons besoin d'autres renseignements sur la structure de ces ensembles. Nous aurions pu les établir dès le paragraphe I.5, mais ils viennent maintenant à leur heure. Voici le premier :

PROPOSITION 7

Sous les hypothèses des propositions 3 ou 4, l'ensemble $\mathcal{P}'$ est compact.

DEMONSTRATION

On sait que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{R} \subset (\mathbb{R}_+^l)^m$. Comme $\mathcal{R}$ est lui-même compact, il suffira de montrer que $\mathcal{P}'$ est fermé, c'est-à-dire que son complémentaire est ouvert. Soit donc $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ une allocation réalisable qui ne soit pas un optimum de Pareto faible. Par définition, il existe une allocation réalisable $(\vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^m)$ telle que :

$$u_i(\vec{z}^i) > u_i(\vec{x}^i) \ \forall\, i. \tag{10}$$

Comme les fonctions u_i sont continues, les inégalités (10) subsistent quand on remplace $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ par une allocation $(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m)$ assez voisine. Plus précisément, on peut trouver une boule $B \subset \mathbb{R}^{lm}$, de centre $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ et de rayon $\epsilon > 0$ assez petit pour que :

$$(\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m) \in \mathcal{R} \cap B \Rightarrow u_i(\vec{z}^i) > u_i(\vec{y}^i). \tag{11}$$

En d'autres termes, si un point de $\mathcal{R}$ n'appartient pas à $\mathcal{P}'$, il est le centre d'une boule qui ne rencontre pas $\mathcal{P}'$. Ceci signifie que l'ensemble $\mathcal{P}'$ est fermé.

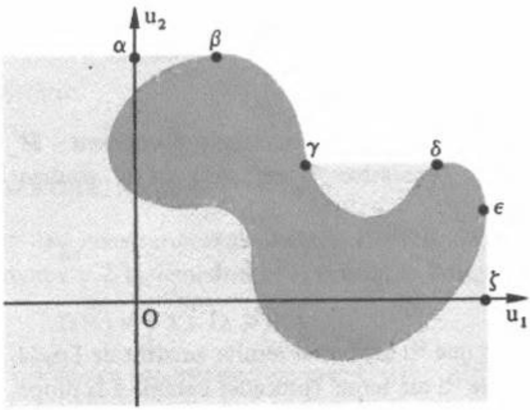


FIGURE IV.16

Dans le cas de deux agents ($m = 2$) on a représenté les ensembles $U(\mathcal{R})$ (grisé foncé), $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^2$ (grisé clair) et $\mathcal{U}$ (courbe $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$).

Moyennant quelques hypothèses naturelles, il est possible d'obtenir davantage de précisions. Je vais montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ ressemble beaucoup à un simplexe. Pour cela, il me faut quelques notations. Comme au paragraphe I.5, je désignerai par U l'application :

$$U(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) = (u_1(\vec{x}^1), \ldots, u_m(\vec{x}^m)) \tag{11}$$

de $(\mathbb{R}^l_+)^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Nous supposerons que $u_i(\vec{0}) = 0$ quel que soit *i*, quitte à ajouter une constante à chacune des fonctions d'utilité. On aura donc :

$$U(\vec{0}, \ldots, \vec{0}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m. \quad (12)$$

L'application U est continue, puisque les fonctions u_i le sont. L'ensemble U $(\mathcal{R})$ sera donc compact, puisque $\mathcal{R}$ l'est (prop. 4). De même l'ensemble U $(\mathcal{P}')$ sera compact, puisque $\mathcal{P}'$ l'est (prop. 7).

DEFINITION 8

Tout vecteur de U $(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+$ sera appelé une *imputation*. On dira qu'une imputation $\vec{w}$ *domine* une imputation $\vec{v}$ si l'on a $\vec{w}_i > \vec{v}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Une imputation sera dite *parétienne* si ses composantes sont positives, et si elle n'est dominée par aucune autre :

$$v_i \geqslant 0 \text{ et } \forall \vec{w} \in U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+, \exists\ i : w_i \leqslant v_i. \quad (13)$$

On notera $\mathcal{U}$ l'ensemble des imputations parétiennes. Par définition :

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m_+ \cap (U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+) \quad (14)$$

et on montre facilement la :

PROPOSITION 9

Hypothèses des propositions 3 ou 4. On suppose en outre que Y_s contient $-\mathbb{R}^l_+$ (libre disposition des biens). Alors l'ensemble $\mathcal{U}$ est compact et contient U$(\mathcal{P})$.

DEMONSTRATION

Comme U $(\mathcal{R})$ est compact, le fait que $\mathcal{U}$ est borné résulte aussitôt de l'inclusion (14). Il est facile de vérifier que $\mathcal{U}$ est fermé (procéder comme à la proposition 7 : le complémentaire de $\mathcal{U}$ dans U $(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+$ est ouvert).

Enfin, prenons un optimum de Pareto strict $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, et examinons l'imputation $(u_1(\vec{x}^1), \ldots, u_m(\vec{x}^m))$. Il ressort immédiatement de la définition qu'elle n'est dominée par aucune autre. Par ailleurs, si l'une des ses composantes, $u_1(\vec{x}^1)$ pour fixer les idées, était strictement négative, il suffirait de détruire le panier de biens $\vec{x}^1$ pour obtenir l'allocation réalisable $(\vec{0}, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m)$. Le premier consommateur la préfère strictement, et les autres sont indifférents, ce qui contredit le fait que $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ était un optimum de Pareto strict.

Pourquoi introduire cet ensemble $\mathcal{U}$? La vraie raison est que ce sera un intermédiaire important dans la démonstration du théorème d'existence pour les équilibres. Pour l'instant, c'est seulement un ensemble lié à U ($\mathcal{P}$) et U ($\mathcal{P}'$), et le principal mérite que je vais lui trouver est d'avoir une structure très simple. Pour la mettre en évidence, j'introduis le simplexe.

$$\Sigma = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^m \mid v_i \geqslant 0 \text{ et } \Sigma\, v_i = 1 \right\} \tag{15}$$

et je définis une application σ de $\mathbb{R}^m_+$ (privé de l'origine) dans Σ par la formule :

$$\sigma(\vec{w}) = \vec{w} \,/\, (w_1 + \ldots + w_m). \tag{16}$$

PROPOSITION 10

Hypothèses de la proposition 9. Supposons en outre que l'origine ne soit pas un optimum de Pareto :

$$(\vec{0}, \ldots, \vec{0}) \notin \mathcal{P}'. \tag{17}$$

Alors l'application $\sigma : \mathcal{U} \to \Sigma$ *est une bijection, et est continue ainsi que son inverse.*

DEMONSTRATION

Je vais construire explicitement l'inverse de σ. Pour cela, associons à chaque point $\vec{v} \in \Sigma$ la demi-droite D $(\vec{v})$ issue de l'origine et passant par $\vec{v}$:

$$D(\vec{v}) = \left\{ \lambda \vec{v} \mid \lambda \geqslant 0 \right\}.$$

Considérons son intersection avec $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+$:

$$I(\vec{v}) = \left\{ \lambda \geqslant 0 \mid \lambda \vec{v} \in U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+ \right\}.$$

Il est clair que I $(\vec{v})$ est un intervalle. En effet, si $\alpha \in I(\vec{v})$, on aura :

$$\alpha \vec{v} - \mathbb{R}^m_+ \subset U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+ ;$$

en particulier, si $0 < \lambda < \alpha$, on aura :

$$\lambda \vec{v} = \alpha \vec{v} - (\alpha - \lambda) \vec{v} \in \alpha \vec{v} - \mathbb{R}^m_+$$

et donc $\lambda \in I(\vec{v})$. Il est non moins clair que cet intervalle contient l'origine

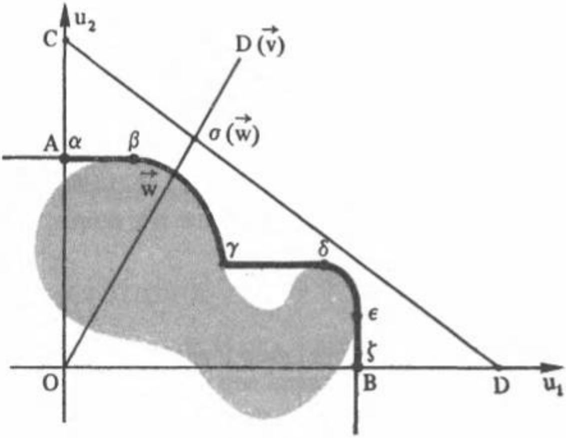


FIGURE IV.17

Toujours pour $m = 2$, on a représenté l'ensemble $\mathcal{U}$ (courbe AB) et le simplexe Σ (segment CD), ainsi que l'application σ.

$\vec{0}$ de $\mathbb{R}^m$, image par U de l'allocation nulle. Il est donc de la forme : $[0, \beta[$ ou $[0, \beta]$.

Je dis d'abord que cet intervalle est borné : $\beta \neq +\infty$. Sinon, pour tout entier n, le vecteur $n\,\vec{v}$ appartiendrait à $U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}_+^m$, et il y aurait donc un vecteur $\vec{w}_n \in U(\mathcal{R})$ tel que $w_{in} \geqslant n\, v_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Comme $\vec{v}$ appartient à Σ, une au moins de ses composantes v_i est strictement positive, et w_{in} tendra vers l'infini, ce qui contredit le fait que $U(\mathcal{R})$ est compact (donc borné).

Je dis ensuite que cet intervalle est fermé : $\beta \in I(\vec{v})$. Prenons en effet une suite $\lambda_n \to \beta$. Alors, pour chaque $\lambda_n \vec{v}$, on peut trouver un $\vec{w}_n \in U(\mathcal{R})$ tel que $\lambda_n \vec{v} \in \vec{w}_n - \mathbb{R}_+^m$. Comme $U(\mathcal{R})$ est compact, on peut extraire une sous-suite $\lambda_{n'}$ telle que les $\vec{w}_{n'}$ convergent vers un $\vec{w} \in U(\mathcal{R})$. En passant à la limite, on obtient $\beta\,\vec{v} \in w - \mathbb{R}_+^m$, donc $\beta \in I(\vec{v})$.

Je dis enfin que $\beta\,\vec{v} \in \mathcal{U}$. Autrement, il existerait un $\vec{w} \in U(\mathcal{R})$ tel que $w_i > \beta\, v_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Comme les inégalités sont strictes, on peut choisir $\epsilon > 0$ assez petit pour que $w_i \geqslant \beta(1+\epsilon)\, v_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Mais cela s'écrit aussi :

$$\beta(1+\epsilon)\vec{v} \in \vec{w} - \mathbb{R}_+^m,$$

et donc $\beta(1+\epsilon) \in I(\vec{v})$, contredisant la définition de β.

Ceci implique que β est non nul : $\beta \neq 0$. En effet, d'après l'hypothèse (17), l'origine $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^m$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$.

Récapitulons tout ceci. Le nombre β dépend bien entendu de $\vec{v}$, et nous le noterons $\beta(\vec{v})$. On a donc $I(\vec{v}) = [0, \beta(\vec{v})]$, avec $0 < \beta(\vec{v}) < \infty$ quel que soit $\vec{v} \in \Sigma$. On posera :

$$\tau(\vec{v}) = \beta(\vec{v}).\vec{v} \in \mathfrak{U}.$$

J'ai ainsi défini une application τ de Σ dans $\mathfrak{U}$. On vérifie immédiatement que c'est l'inverse cherché pour σ : chaque demi-droite $D(\vec{v})$ ne porte qu'un point de Σ et un point de $\mathfrak{U}$, images l'un de l'autre par les applications σ et τ.

Ainsi, l'application σ est bijective. Il est clair qu'elle est continue. On sait aussi que les ensembles $\mathfrak{U}$ et Σ sont compacts. D'après un théorème classique, cela suffit pour que l'inverse τ soit elle aussi continue (1), et le résultat est établi.

Les imputations $\vec{v}$ représentent des niveaux d'utilité individuels que la société peut assurer à ses membres, soit qu'elle les réalise exactement soit qu'elle les dépasse. En d'autres termes, on peut toujours trouver une allocation réalisable $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ telle que $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$, même s'il n'y en a pas qui vérifie les égalités $u_i(\vec{x}^i) = v_i$. Le lien entre imputations parétiennes et optima de Pareto est assuré par la proposition 9 et la relation :

$$U(\mathcal{P}') \cap \mathbb{R}_+^m = \mathfrak{U} \cap U(\mathcal{R}). \tag{18}$$

En d'autres termes, si une imputation parétienne est l'image par U d'une allocation réalisable, cette dernière est nécessairement un optimum de Pareto. On aurait souhaité, bien sûr, que $U(\mathcal{P})$ ou $U(\mathcal{P}')$ aient les mêmes propriétés sympathiques que $\mathfrak{U}$: ce n'est malheureusement pas le cas.

A partir de là, notre étude bifurque. Nous avons montré que l'ensemble des optima de Pareto est non vide, et nous l'avons apparenté à un simplexe. Je désire maintenant caractériser ces optima de Pareto. Cette recherche sera menée dans deux cadres différents avec des méthodes différentes. Commençons par le cas convexe : l'ensemble de production global Y_s est convexe, les fonctions d'utilité quasi-concaves.

---

(1) Soit F un fermé de $\mathfrak{U}$. Il est compact, puisque $\mathfrak{U}$ l'est, et $\sigma(F)$ le sera aussi. Mais $\tau^{-1}(F) = \sigma(F)$, qui sera donc fermé. Donc τ est continue.

Certes, nous avons à notre disposition la caractérisation du paragraphe I.5, via des coefficients de transfert entre fonctions d'utilité. Mais ces coefficients ont peu de réalité économique, et nous préférerions une caractérisation qui fît intervenir des prix. La clef est l'observation suivante : dire que l'imputation $\vec{v}$ est parétienne signifie que les possibilités techniques et les ressources initiales ne permettent pas de réaliser des niveaux d'utilité individuels supérieurs à $v_1, \ldots, v_m$. Les ensembles :

$$A(\vec{v}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i - \vec{\Omega} \mid \forall i,\ u_i(\vec{x}^i) > v_i \right\} \tag{19}$$

et Y_s ont une intersection vide : tout point commun permettrait d'écrire $\Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} \in Y_s$, avec $u_i(\vec{x}^i) > v_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, et l'imputation $(u_1(\vec{x}^1), \ldots, u_m(\vec{x}^m))$ dominerait $\vec{v}$, qui ne saurait donc être parétienne. Il ne reste plus qu'à remarquer que les ensembles en question sont convexes, et à appliquer le théorème de séparation (th. I.5). Rappelons que $\overline{\Pi}$ désigne le simplexe $p_1 + \ldots + p_l = 1$ de $\mathbb{R}^l_+$, c'est-à-dire l'ensemble des prix positifs normalisés.

PROPOSITION 11

L'ensemble de production global Y_s est supposé convexe, fermé et vérifiant :

$$Y_s \supset -\mathbb{R}^l_+ \text{ et } Y_s \cap \mathbb{R}^l_+ = \{\vec{0}\}. \tag{20}$$

Les fonctions d'utilités u_i sont supposées être quasi-concaves, continues et ne pas atteindre leur maximum :

$$\forall i,\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^l_+,\ \exists \vec{z} \in \mathbb{R}^l_+ : u_i(\vec{z}) > u_i(\vec{x}). \tag{21}$$

Alors, pour toute imputation parétienne $\vec{v} \in \mathcal{U}$, il existe un système de prix $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ tel que, quels que soient l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in (\mathbb{R}^l_+)^m$ et le vecteur de production $\vec{y} \in Y_s$, on ait :

$$[u_i(\vec{x}^i) > v_i \quad \forall i] \Rightarrow \langle \vec{p}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \vec{y} \rangle \geqslant 0. \tag{22}$$

DEMONSTRATION

Comme nous l'avons remarqué, il suffit d'appliquer le théorème de séparation aux ensembles $A(\vec{v})$ et Y_s. Il est clair qu'ils sont convexes ; encore faut-il montrer que $A(\vec{v})$ est non vide.

Comme $\vec{v} \in U(\mathcal{R}) - \mathbb{R}^m_+$, il existe pour chaque i un panier de biens $\vec{x}^i$ tel que $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$. D'après l'hypothèse (21), il existe pour chaque i un panier de

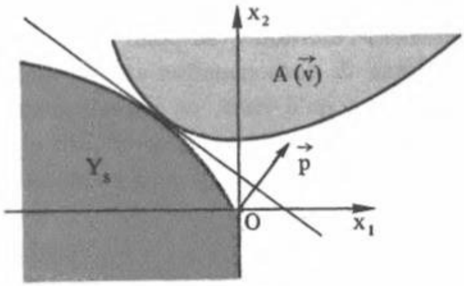


FIGURE IV.18

L'utilisation du théorème de Minkowski dans la proposition II.

biens $\vec{z}^1$ tel que $u_i(\vec{z}^i) > u_i(\vec{x}^i)$. Le vecteur $\Sigma\, \vec{z}^i - \vec{\Omega}$ appartient à $A(\vec{v})$, qui est donc non vide.

D'après le théorème de séparation, il existe un vecteur $\vec{p}$ non nul tel que, pour tout $\vec{z}$ de $A(\vec{v})$ et tout $\vec{y}$ de Y_s, on ait :

$$<\vec{p}, \vec{z}> \geqslant <\vec{p}, \vec{y}>, \tag{23}$$

d'où la formule (22), en remplaçant $\vec{z}$ par $\Sigma\, \vec{x}^i - \vec{\Omega}$. Reste à montrer que les composantes de $\vec{p}$ sont positives ; quitte à le remplacer par $\vec{p}\ /\ \Sigma\, p_i$, on se ramènera alors à un vecteur de $\overline{\Pi}$.

On sait que $Y_s \supset -\mathbb{R}^l_+$. Au second membre de la formule (23), $\vec{y}$ peut donc être n'importe quel vecteur à composantes négatives. Fixons un $\vec{z}$ dans $A(\vec{v})$; on obtient la formule :

$$<\vec{p}, \vec{z}> \geqslant \Sigma\, p_k\, y_k \quad \forall\, y_i \leqslant 0.$$

Si l'un des p_i était strictement négatif, par exemple p_1, on pourrait prendre $y_1 = -n$, $y_k = 0$ pour $k \neq 1$, et on obtiendrait

$$<\vec{p}, \vec{z}> \geqslant n\,(-p_1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ce qui est absurde, puisque le second membre tend vers $+\infty$ avec n, et que le premier membre est fixé. Le résultat est établi.

Avant de tirer les conséquences de la formule (22), réfléchissons un peu sur les hypothèses faites. Elles sont familières, à l'exception de la condition (21).

Celle-ci est assez naturelle : elle affirme qu'il n'est pas possible de satisfaire complètement l'individu *i*, au point qu'il ne désire plus rien de rien. Quel que soit le niveau de consommation atteint, on pourra encore lui faire plaisir en rajoutant de ce qu'il aime, ou en retranchant de ce qu'il n'aime pas. Cette hypothèse de non-satiété a des conséquences intéressantes ; en particulier, elle implique l'hypothèse (17), que nous avions faite antérieurement :

LEMME 12

Sous les hypothèses de la proposition 11 :

(a) *pout tout i, tout* $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^l$ *et tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^l$ *tel que :*

$$\| \vec{\xi} - \vec{x} \| \leqslant \epsilon \text{ et } u_i(\vec{\xi}) > u_i(\vec{x})$$

(b) *si* $\Omega_k > 0$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant \mathcal{C}$, *l'allocation nulle ne saurait être optimale au sens de Pareto.*

DEMONSTRATION

(a) D'après l'hypothèse (21), il existe $\vec{z} \in \mathbb{R}_+^l$ tel que $u_i(\vec{z}) > u_i(\vec{x})$. Considérons alors la fonction :

$$\varphi(t) = u_i(\vec{x} + t(\vec{z} - \vec{x}))$$

pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. C'est une fonction concave, continue, de la variable t, vérifiant

$$\varphi(0) = u_i(\vec{x}) < u_i(\vec{z}) = \varphi(1).$$

De la concavité, on conclut que $\varphi(t) > \varphi(0)$ pour $t \in]0, 1]$. En prenant $t = \epsilon / \| \vec{z} - \vec{x} \|$, et $\vec{\xi} = \vec{x} + t \| \vec{z} - \vec{x} \|$, on obtient $\| \xi - \vec{x} \| = \epsilon$ et $u_i(\vec{\xi}) = \varphi(t) > u_i(\vec{x})$.

(b) En appliquant pour chaque i le résultat précédent à $\vec{x} = \vec{0}$, on montre que pour chaque $\epsilon > 0$ il existe une allocation $(\vec{\xi}^1, \ldots, \vec{\xi}^m)$ telle que $\| \vec{\xi}^i \| \leqslant \epsilon$ et $u_i(\vec{\xi}^i) > 0$. Si ϵ est choisi assez petit, le vecteur $\Sigma \vec{\xi}^i - \vec{\Omega}$ appartiendra encore à $-\mathbb{R}_+^l$, donc à $\vec{Y_s}$. L'allocation $(\vec{\xi}^1, \ldots, \vec{\xi}^m)$ sera donc réalisable et unanimement préférée à $(\vec{0}, \ldots, \vec{0})$.

Tirons maintenant les conséquences de la proposition 11. Remarquons d'abord qu'il est possible de renforcer légèrement la formule (22), en remplaçant les inégalités strictes $u_i(\vec{x}^i) > v_i$ par des inégalités larges $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$. En effet, supposons $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$ pour tout i. D'après le lemme 12 (a), il est possible de trouver une suite $\vec{x}^1_n \to \vec{x}^1$, avec $u_i(\vec{x}^1_n) > u_i(\vec{x}^1)$, donc $u_i(\vec{x}^1_n) > v_i$ pour chaque i. D'après la formule (22), on aura :

$$<\vec{p}, \Sigma \vec{x}^1_n - \vec{\Omega} - \vec{y}> \geqslant 0,$$

et en passant à la limite :

$$<\vec{p}, \Sigma \vec{x}^1 - \vec{\Omega} - \vec{y}> \geqslant 0.$$

On peut donc énoncer :

DEFINITION 13

Hypothèses de la proposition 11. On dit que le système de prix $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ *soutient* l'imputation parétienne $\vec{v} \in \mathfrak{U}$ si l'on a :

$$[u_i(\vec{x}^1) \geqslant v_i \quad \forall\, i] \Rightarrow <\vec{p}, \Sigma \vec{x}^1 - \vec{\Omega} - \vec{y}> \geqslant 0 \tag{24}$$

pour toute allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ et tout vecteur de production $\vec{y} \in Y_s$. Toute imputation parétienne est soutenue par un système de prix au moins.

Un cas particulier important est celui où $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ et $\vec{y}$ sont liés par la relation $\Sigma \vec{x}^1 - \vec{\Omega} - \vec{y} = \vec{0}$, c'est-à-dire où le vecteur de production choisi est celui qui permet de réaliser l'allocation en question (1). La formule (24) se réduit alors à :

$$<\vec{p}, \Sigma \vec{x}^1 - \vec{\Omega} - \vec{y}> = 0,$$

une égalité comptable entre $<\vec{p}, \vec{y}>$, profit total des producteurs, et $<\vec{p}, \Sigma \vec{x}^1> - <\vec{p}, \vec{\Omega}>$, somme totale déboursée par les consommateurs.

Ceux-ci achètent les biens $\vec{x}^1$ aux producteurs, mais leur vendent les matières premières $\vec{\Omega}$.

En d'autres termes, le minimum du produit scalaire $<\vec{p}, \Sigma \vec{x}^1 - \vec{\Omega} - \vec{y}>$, pour $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$ et $\vec{y} \in Y_s$ est zéro et est atteint quand $\vec{y}$ permet de réaliser $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$. Enonçons ceci de manière précise.

(1) Remarquons que, dans l'énoncé de la prop. 11 ou de la déf. 13, l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ n'est nullement supposée réalisable.

COROLLAIRE 14

Hypothèses de la proposition 11. On suppose que le système de prix $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ *soutient l'imputation parétienne* $\vec{v} \in \mathcal{U}$, *et on choisit une allocation réalisable* $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ *telle que* $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant m$. *On pose* $\vec{y} = \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} \in Y_s$
Alors, pour chaque i :

$$[\vec{\xi}^i \in \mathbf{R}^l_+ \text{ et } u_i(\vec{\xi}^i) \geqslant v_i] \Rightarrow <\vec{p}, \vec{\xi}^i> \geqslant <\vec{p}, \vec{x}^i> \tag{25}$$

$$\vec{\eta} \in Y_s \Rightarrow <\vec{p}, \vec{\eta}> \leqslant <\vec{p}, \vec{y}>. \tag{26}$$

DEMONSTRATION

Dire que l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est réalisable signifie que $\vec{y} = \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega}$ appartient à l'ensemble de production global Y_s. On a alors, d'après la définition 13 :

$$<\vec{p}, \Sigma \vec{\xi}^i - \vec{\Omega} - \vec{\eta}> \geqslant 0 = <\vec{p}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \vec{y}>,$$

ceci quels que soient les $\vec{\xi}^i$ dans $\mathbf{R}^l_+$ et $\vec{\eta}$ dans Y_s. Ceci s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^{m} (<\vec{p}, \vec{\xi}^i> - <\vec{p}, \vec{x}^i>) \geqslant <\vec{p}, \vec{\eta}> - <\vec{p}, \vec{y}>.$$

En prenant $(\vec{\xi}^1, \ldots, \vec{\xi}^m) = (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ au premier membre, on obtient la formule (26). En prenant au premier membre $\vec{\xi}^j = \vec{x}^j$ pour $j \neq i$, et $\vec{\eta} = \vec{y}$ au second, on obtient la formule (25).

Comme cas particulier, on obtient la caractéristique voulue des optima de Pareto en termes de prix :

COROLLAIRE 15

Hypothèses de la proposition 11. Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathcal{P}'$ *un optimum de Pareto, et* $\vec{y} = \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega}$. *Alors il existe un système de prix* $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ *tel que, pour chaque i :*

$$[\vec{\xi}^i \in \mathbf{R}^l_+ \text{ et } u_i(\vec{\xi}^i) \geqslant u_i(\vec{x}^i)] \Rightarrow <\vec{p}, \vec{\xi}^i> \geqslant <\vec{p}, \vec{x}^i> \tag{27}$$

$$\vec{\eta} \in Y_s \Rightarrow <\vec{p}, \vec{\eta}> \leqslant <\vec{p}, \vec{y}>. \tag{28}$$

DEMONSTRATION

Il suffit d'appliquer le corollaire 14 avec $v_i = u_i(\vec{x}^i)$. Le système de prix $\vec{p}$ est l'un de ceux qui soutiennent l'imputation parétienne $\vec{v}$.

L'interprétation économique du corollaire 15 est particulièrement claire. Le vecteur de production $\vec{y}$ est celui qui permet de réaliser l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$; d'après la formule (28), il maximise le profit global. La formule (27) exprime que le panier de biens $\vec{x}^i$, de tous ceux qui procurent au consommateur *i* une satisfaction au moins égale, est celui qui coûte le moins cher. De même dans la formule (25), le panier de biens $\vec{x}^i$ permet de réaliser le niveau d'utilité v_i au moindre coût.

Imaginons l'économie entre les mains d'un gestionnaire avisé, désirant atteindre un optimum de Pareto $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$. Deux méthodes s'offrent à lui pour cela. La première consiste à ordonner aux producteurs de produire $\vec{y} = \Sigma\, \vec{x}^i - \vec{\Omega}$, et aux divers consommateurs de consommer $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m$ respectivement ; elle dépouille les agents de toute initiative. La seconde consiste à fixer un système de prix $\vec{p}$ soutenant l'imputation parétienne $\vec{v} = (u_1\ (\vec{x}^1), \ldots, u_m\ (\vec{x}^m))$, à assigner aux divers consommateurs les niveaux d'utilité respectifs $v_1, \ldots, v_m$, et à passer la consigne : les producteurs maximiseront le profit global et les consommateurs chercheront à atteindre ces niveaux d'utilité au moindre coût.

On a là une procédure décentralisée, visiblement moins lourde que la première : assigner un niveau d'utilité v_i c'est donner un seul nombre, assigner un panier de biens $\vec{x}^i$ c'est en donner *l* ! Elle pose cependant quelques problèmes. Le premier est technique : nous n'avons pas de garanties d'unicité. Maximiser le profit global conduira peut-être à plusieurs vecteurs de production, dont un seul sera le bon. Minimiser le coût de réalisation d'un niveau d'utilité donné conduira peut-être à plusieurs paniers de biens, dont un seul sera le bon. Nous avons déjà rencontré ce type de problème, où le critère utilisé laisse subsister une certaine ambiguïté, et nous y reviendrons. Le second est un problème de réalisme : comment, en pratique, assigner un niveau d'utilité à un consommateur ? Cela nécessite d'établir au préalable sa relation de préférence, ce qui est un énorme travail. Il serait beaucoup plus commode de lui allouer une somme d'argent à dépenser, le consommateur cherchant alors ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut se payer. Le résultat suivant montre que cette démarche conduit également à l'optimum de Pareto :

PROPOSITION 16

Hypothèses de la proposition 11. Soit $\vec{p} \in \Pi$ un système de prix soutenant une imputation parétienne $\vec{v} \in \mathfrak{U}$, et $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ une allocation réalisable *telle que* $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$, *pour* $1 \leqslant i \leqslant m$. *On suppose* $<\vec{p}, \vec{x}^i> \neq 0$; *on a alors*:

$$[\vec{\xi}^i \in \mathbb{R}^l_+ \text{ et } <\vec{p}, \vec{\xi}^i> \leqslant <\vec{p}, \vec{x}^i>] \Rightarrow u_i(\vec{\xi}_i) \leqslant v_i \tag{29}$$

$$\vec{\eta} \in Y_s \Rightarrow <\vec{p}, \vec{\eta}> \leqslant <\vec{p}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega}>. \tag{30}$$

DEMONSTRATION

La formule (30) procède immédiatement du corollaire 14. Il nous donne également :

$$[\vec{\xi}^i \in \mathbb{R}^l_+ \text{ et } u_i(\vec{\xi}^i) \geqslant v_i] \Rightarrow <\vec{p}, \vec{\xi}^i> \geqslant <\vec{p}, \vec{x}^i>. \tag{31}$$

d'où il faut déduire la formule (29). Par contraposition (P ⇒ Q si et seulement si non Q ⇒ non P), la formule (31) nous donne (j'omets de rappeler à chaque fois l'appartenance à $\mathbb{R}^l_+$) :

$$<\vec{p}, \vec{\xi}^i> < <\vec{p}, \vec{x}^i> \Rightarrow u_i(\vec{\xi}^i) < v_i. \tag{32}$$

Le seul cas litigieux est celui où $<\vec{p}, \vec{\xi}^i> = <\vec{p}, \vec{x}^i>$. Pour le régler, on se sert de l'hypothèse que $<\vec{p}, \vec{x}^i>$ est non nul, donc strictement positif puisque $\vec{p}$ et $\vec{x}^i$ appartiennent à $\mathbb{R}^l_+$:

$$<\vec{p}, \vec{x}^i> > 0.$$

On peut donc approcher $\vec{\xi}^i$ par une suite de vecteurs $\vec{\xi}^i_n \in \mathbb{R}^l_+$ vérifiant $<\vec{p}, \vec{\xi}^i_n> < <\vec{p}, \vec{x}^i>$. En leur appliquant la formule (32), on obtient $u_i(\vec{\xi}^i_n) < v_i$. En passant à la limite, puisque la fonction u_i est continue, on obtient $u_i(\vec{\xi}^i) \leqslant v_i$, l'inégalité désirée.

COROLLAIRE 17

Hypothèses de la proposition 11. Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathcal{P}'$ *un optimum de Pareto et* $\vec{p} \in \Pi$ *un système de prix soutenant* $(u_1(\vec{x}^1), \ldots, u_m(\vec{x}^m))$. *On suppose* $<\vec{p}, \vec{x}^i> \neq 0$; *alors :*

$$[\vec{\xi}^i \in \mathbb{R}^l_+ \text{ et } <\vec{p}, \vec{\xi}^i> \leqslant <\vec{p}, \vec{x}^i>] \Rightarrow u_i(\vec{\xi}^i) \leqslant u_i(\vec{x}^i) \tag{33}$$

$$\vec{\eta} \in Y_s \Rightarrow <\vec{p}, \vec{\eta}> \leqslant <\vec{p}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega}>. \tag{34}$$

La démonstration est immédiate. Il est utile de comparer les conditions (27) et (33). L'une dit que l'agent *i* cherche à atteindre le niveau d'utilité $u_i(\vec{x}^i)$

au moindre coût. L'autre dit que l'agent i cherche à dépenser la somme $< \vec{p}, \vec{x}^i >$ au mieux de ses intérêts. Les deux démarches sont différentes. L'une est la recherche du « meilleur marché » dans une certaine catégorie de biens ; l'autre est la réalisation de la « meilleure affaire » dans la limite d'un certain budget. Nous venons de voir que, moyennant une hypothèse assez faible ($< \vec{p}, \vec{x}^i > \neq 0$), elles conduisent au même résultat.

Toutes ces caractérisations reposent bien entendu sur la convexité de l'ensemble Y_s et des relations de préférence u_i. Nous verrons ultérieurement ce que l'on peut dire dans le cas non convexe. Mais auparavant, nous allons terminer l'étude du cas convexe, en montrant l'existence d'équilibres concurrentiels.

3. Existence d'équilibres concurrentiels

Je me place dans le cadre défini ci-dessus, avec toutes les hypothèses de convexité qui ont été faites au fur et à mesure, mais je désire m'orienter vers la définition et l'étude d'équilibres, analogues à ceux du chapitre III. Pour cela, il nous faudra introduire la propriété privée, non seulement des ressources initiales, mais aussi des moyens de production.

Les ressources totales $\vec{\Omega}$ se trouvent donc initialement réparties entre les m agents. La part de l'agent i est $\vec{\omega}^i$, de telle sorte que :

$$\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i.$$

Il y a p unités de production, chacune caractérisée par son ensemble de production Y_k, $1 \leqslant k \leqslant p$. L'ensemble de production global est donné par :

$$Y_s = \sum_{k=1}^{p} Y_k.$$

Reste à définir la propriété privée de la k^{eme} unité de production. Elle consistera en :

(1 a) **une règle de gestion** : le producteur maximise son profit. Il répond au système de prix $\vec{p}$ en choisissant un vecteur de production $\vec{y}$ qui maximise $< \vec{p}, \vec{\eta} >$ pour $\vec{\eta} \in Y_k$;

(1 b) **une règle de répartition des bénéfices** : le profit réalisé $<\vec{p}, \vec{y}>$ est distribué aux m agents suivant des coefficients θ^i_k fixés à l'avance ; la part de l'agent i est $\theta^i_k <\vec{p}, \vec{y}>$, et l'on a :

$$\forall\, i, \theta^i_k \geqslant 0 \text{ et } \theta^1_k + \ldots + \theta^m_k = 1.$$

La première règle a été discutée au paragraphe 1. Le mot « producteur », là encore, doit être compris comme synonyme d' « unité de production ». Il ne désigne pas en général un agent économique particulier. Ce peut être le cas si les coefficients θ_1 sont tous nuls sauf un, le premier par exemple : $\theta_1 = 1$. On peut alors parler de l'agent 1 comme du producteur, avec cette réserve cependant que c'est avant tout un consommateur : son comportement est dicté par sa fonction d'utilité. Ce n'est donc pas un capitaliste, en ce sens qu'il ne réinvestit pas son profit, il le consomme. Cette attitude n'est conforme ni à la pratique ni à l'éthique du capitalisme. On rencontre là de nouveau un des points faibles du modèle, l'absence de l'investissement.

Pour comprendre la deuxième règle, il faut se représenter les θ^i_k comme des parts de société. Dire que θ^i_k est non nul signifie que l'agent i est copropriétaire, ou actionnaire, de l'entreprise k. La somme $\theta^i_k <\vec{p}, \vec{y}>$ représente ses dividendes et l'égalité $\theta^i_k + \ldots + \theta^m_k = 1$ exprime que les bénéfices sont intégralement distribués. Il n'y a bien entendu ni investissement ni trésorerie. Les profits des entreprises sont tout entiers réinjectés dans le circuit de la consommation. La règle (1 b) est une règle comptable, permettant l'utilisation par l'économie des bénéfices du secteur productif.

Les producteurs ont donc leur propre règle de gestion ; on remarquera qu'elle nécessite la connaissance du système de prix $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ prévalant sur le marché, mais non des actions des autres agents économiques, consommateurs ou producteurs. Par rapport au paragraphe précédent, ils ont certainement acquis leur autonomie.

Du point de vue des consommateurs, rien n'est changé par rapport au chapitre précédent, sinon leurs disponibilités financières. Pour l'agent i, à la somme $<\vec{p}, \vec{\omega}^i>$ provenant de la vente de ses ressources initiales aux prix du marché, viennent s'ajouter les dividendes des diverses entreprises dont il possède des parts. Au total, cela fait :

$$<\vec{p}, \vec{\omega}^i> + \sum_{k=1}^{p} \theta^i_k <\vec{p}, \vec{y}^k> \tag{1}$$

où $\vec{y}^k$ désigne le vecteur de production adopté par l'entreprise k. Il est alors très facile d'étendre aux économies avec production les notions introduites au paragraphe III.2 (déf. 1 et prop. 2).

DEFINITION 1

On dit que $\vec{p} \in \bar{\Pi}$ est un système de *prix d'équilibre*, et que $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est l'*allocation d'équilibre* associée, si l'on a :

(a) l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est réalisable :

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i - \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i = \sum_{k=1}^{p} \vec{y}^k, \text{ avec } \vec{y}^k \in Y_k \ \ \forall k;$$

(b) pour chaque consommateur i :

$$\langle \vec{p}, \vec{x}^i \rangle = \langle \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i \langle \vec{p}, \vec{y}^k \rangle;$$

(c) pour chaque consommateur i :

$$[\vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^l \text{ et } \langle \vec{p}, \vec{\xi} \rangle \leqslant \langle \vec{p}, \vec{x}^i \rangle] \Rightarrow u_i(\vec{\xi}) \leqslant u_i(\vec{x}^i);$$

(d) pour chaque producteur k :

$$\vec{\eta} \in Y_k \Rightarrow \langle \vec{p}, \vec{\eta} \rangle \leqslant \langle \vec{p}, \vec{y}^k \rangle.$$

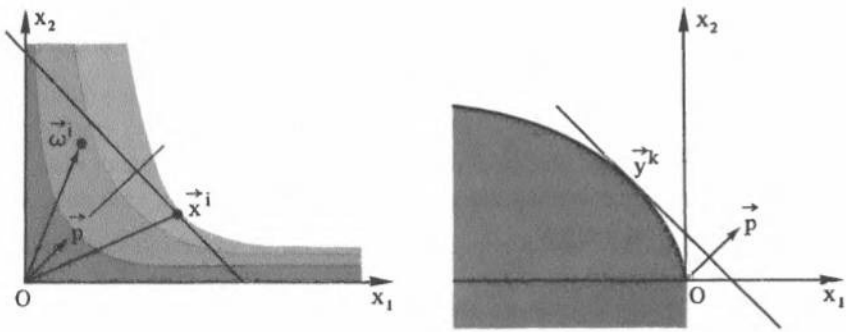


FIGURE IV.19

Le comportement du consommateur i (à gauche), et du producteur k (à droite). Le vecteur $\vec{p}$ (système de prix) est le même dans les deux figures. La différence $\langle \vec{p}, \vec{x}^i \rangle - \langle \vec{p}, \vec{\omega}^i \rangle$ représente les dividendes échus à l'agent i.

Les conditions (b) et (c) expriment que chaque consommateur choisit ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut se payer. La demande totale est alors $\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i$. La condition (d) exprime que chaque producteur maximise son profit ; on pourrait l'écrire aussi $\vec{y}^k \in \Gamma_k (\vec{p})$, avec les notations du paragraphe 1. L'offre totale est alors $\sum_{k=1}^{p} \vec{y}^k + \vec{\Omega}$. La condition (a) exprime que, si $\vec{p}$ est un système de prix d'équilibre, la demande totale est égale à l'offre totale, pour chacun des l biens. La problématique est celle du chapitre III, les principes gouvernant le comportement des consommateurs sont inchangés. On a simplement introduit dans le jeu économique des acteurs supplémentaires, les producteurs, régis par les règles (1 a) et (1 b).

Ici encore, le problème sera de montrer qu'il existe effectivement des équilibres pour une économie donnée. Cela nécessitera des hypothèses, principalement de convexité, que nous avons déjà rencontrées au fil des pages, et que nous rassemblons ici :

(K 1) la fonction d'utilité u_i est quasi-concave, continue, et ne dépend que de $\vec{x}^i$;

(K 2) pour chaque i, on a $\omega_k^i > 0 \; \forall \, k$ et $u_i (\vec{\omega}^i) \geqslant u_i (\vec{0}) = 0$;

(K 3) les ensembles de production Y_k sont convexes, fermés, contiennent le cône $-\mathbb{R}_+^l$, et vérifient :

$$[\vec{y}^k \in Y_k \; \forall \, k \text{ et } \vec{y}^1 + \ldots + \vec{y}^k = \vec{0}] \Rightarrow \vec{y}^k = \vec{0} \; \forall \, k.$$

L'hypothèse (K 1) nous a déjà servi au chapitre III, de même que la condition $\omega_k^i > 0 \; \forall \, k$. La condition $u_i (\vec{\omega}^i) \geqslant 0$ est assez naturelle : si les ressources initiales du consommateur *i* lui confèrent un niveau d'utilité strictement négatif, il peut toujours éliminer de son panier les biens qu'il ne désire pas, et se ramener au moins à $u_i (\vec{0})$, c'est-à-dire 0.

L'hypothèse (K 3) implique que l'ensemble de production global est convexe, fermé, contient le cône $-\mathbb{R}_+^l$, et ne rencontre le cône $\mathbb{R}_+^l$ qu'à l'origine. En particulier, il n'y a pas de vecteur de production global $\vec{y}^s$ dont toutes les composantes soient positives, l'une d'entre elles strictement : on ne peut pas agencer les diverses entreprises de façon à produire quelque chose à partir de rien. Mais l'hypothèse (K 3) va un peu plus loin : si le bilan global $\vec{y}^s$ est nul, tous les bilans individuels $\vec{y}^k$ le sont. On ne peut pas agencer les diverses entreprises de façon à ce qu'elles tournent en circuit fermé, leur production équilibrant exactement leur consommation. Ce serait le cas si par exemple on couplait une entreprise produisant une unité de bien 1 par unité de bien 2, avec une entreprise produisant une unité de bien 2 par unité de bien 1. L'hypothèse (K 3) est une hypothèse d'irréversibilité de la production : en économie non plus, il n'y a pas de mouvement perpétuel.

THEOREME 2

Sous les hypothèses (K 1), (K 2), (K 3), il existe au moins un système de prix d'équilibre.

Ce résultat est le pendant du théorème III.2.10, et se démontre par des méthodes analogues. L'idée maîtresse est d'appliquer le théorème de Kakutani (théorème III.2.7) à une correspondance bien choisie. A tout triplet $[\vec{v}, \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})]$, où $\vec{v} \in \mathcal{U}$ est une imputation parétienne, $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ un système de prix, $\vec{X} = (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathcal{R}$ une allocation réalisable et $\vec{Y} = (\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^p)$ une famille de vecteurs de production, liés par $\Sigma\, \vec{x}^i - \vec{\Omega} = \Sigma\, \vec{y}^k$, elle fera correspondre un ou plusieurs triplets de même nature. Je la construis de la façon que voici.

Je désigne par $\widetilde{\mathcal{R}}$ l'ensemble des couples $(\vec{X}, \vec{Y})$, précédemment décrits : $\vec{X}$ est une allocation réalisable, et $\vec{Y}$ une manière de l'obtenir :

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \left\{ (\vec{X}, \vec{Y}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \vec{X} = (\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m) \in \mathcal{R} \\ \vec{Y} = (\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^p) \text{ avec } \vec{y}^k \in Y_k \;\; \forall\, k \\ \Sigma\, \vec{x}^i - \vec{\Omega} = \Sigma\, \vec{y}^k. \end{array} \right\} \tag{2}$$

Dire que l'allocation $\vec{X}$ est réalisable signifie justement qu'il est possible de trouver des vecteurs de production $\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^p$ compatibles avec elle. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{R}}$ est donc non vide. J'ai besoin d'autres renseignements :

LEMME 1

L'ensemble $\widetilde{\mathcal{R}}$ est convexe compact.

DEMONSTRATION

On sait déjà (proposition 2.4) que $\mathcal{R}$ est convexe compact. Si je prends deux éléments $(\vec{X}, \vec{Y})$ et $(\vec{X}', \vec{Y}')$ de $\tilde{\mathcal{R}}$, et un nombre λ compris entre 0 et 1, alors $\lambda \vec{X} + (1 - \lambda) \vec{X}'$ appartient encore à $\mathcal{R}$, et $\lambda \vec{y}^k + (1 - \lambda) \vec{y}'^k$ appartient toujours à Y_k, puisque ces ensembles sont convexes. Comme la condition de compatibilité est linéaire, elle est encore satisfaite pour $\lambda \vec{X} + (1 - \lambda) \vec{X}'$ et $\lambda \vec{Y} + (1 - \lambda) \vec{Y}'$. Donc l'ensemble $\tilde{\mathcal{R}}$ est bien convexe.

Pour montrer qu'il est compact, prenons une suite quelconque $(\vec{X}_n, \vec{Y}_n)$ dans $\tilde{\mathcal{R}}$ et montrons qu'on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un point de $\tilde{\mathcal{R}}$. Comme $\mathcal{R}$ est compact, on peut extraire de la suite $\vec{X}_n$, une sous-suite, notée $\vec{X}_{n'}$, convergeant vers un point $\vec{X}$ de $\mathcal{R}$. Je vais montrer que chacune des suites $\vec{y}_n^k$ est bornée, et pour ce faire, je vais adapter la démonstration de la proposition 2.3.

Supposons, pour fixer les idées, que $\| \vec{y}_n^1 \|$ tende vers l'infini, et que tous les quotients $\| \vec{y}_n^k \| / \| \vec{y}_n^1 \|$ restent bornés par une constante M. Pour chaque *n*, on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}_n^i - \vec{\Omega} = \sum_{k=1}^{p} \vec{y}_n^k. \tag{3}$$

En divisant les deux membres par $\| \vec{y}_n^1 \|$, on obtient :

$$[\Sigma \vec{x}_n^i - \vec{\Omega}] / \| \vec{y}_n^1 \| = \vec{y}_n^1 / \| \vec{y}_n^1 \| + \ldots + \vec{y}_n^p / \| \vec{y}_n^1 \|. \tag{4}$$

Quand *n* tend vers l'infini, le premier membre de cette égalité tend vers $\vec{0}$. Chacun des termes du second membre reste borné ; on peut donc, quitte à extraire une sous-suite, supposer qu'ils convergent :

$$\forall k, \exists \vec{u}^k : \vec{y}_n^k / \| \vec{y}_n^1 \| \Rightarrow \vec{u}^k.$$

L'ensemble de production Y_k est convexe, contient l'origine et le vecteur $\vec{y}_n^k$; comme $\| \vec{y}_n^1 \| > 1$, il contiendra le vecteur $\vec{y}_n^k / \| \vec{y}_n^1 \|$, pout tout *n*. Comme cet ensemble est également fermé, il devra contenir la limite de cette suite, c'est-à-dire le point $\vec{u}^k$. On remarquera que $\vec{u}^1$ est nécessairement de norme unité.

Finalement, en passant à la limite dans l'égalité (4), on obtient :

$$\vec{0} = \vec{u}^1 + \ldots + \vec{u}^p, \text{ avec } u^k \in Y_k \ \forall k.$$

D'après l'hypothèse (K 3), cela implique que tous les $\vec{u}^k$ sont nuls. Mais $\| \vec{u}^1 \| = 1$, d'où une contradiction. Ceci montre par l'absurde que toutes les suites $\vec{y}^k_{n'}$ sont bornées.

Il ne reste plus qu'à extraire de chacune d'elles une suite convergente : $\vec{y}^k_{n''} \to \vec{y}^k$. Comme les ensembles de production sont fermés, $\vec{y}^k \in Y_k$. En passant à la limite dans l'égalité (3), on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i - \vec{\Omega} = \sum_{k=1}^{p} \vec{y}^k.$$

Donc $(\vec{X}_{n''}, \vec{Y}_{n''})$ converge vers $(\vec{X}, \vec{Y})$, qui appartient aussi à $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Le résultat est établi.

Si $\vec{v} \in \mathcal{U}$ est une imputation parétienne, il est naturel de lui associer toutes les allocations réalisables $\vec{X} \in \mathfrak{R}$ qui assurent au consommateur *i* une utilité au moins égale à v_i. Il est bon aussi de noter la façon dont une telle allocation peut être réalisée : on obtiendra ainsi un élément $(\vec{X}, \vec{Y})$ de $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Finalement, je définis une correspondance ψ de $\mathcal{U}$ dans $\widetilde{\mathfrak{R}}$ par :

$$\Psi(\vec{v}) = \left\{ (\vec{X}, \vec{Y}) \in \widetilde{\mathfrak{R}} \mid u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i . \right\}$$

D'après la définition 2.8, l'ensemble $\Psi(\vec{v})$ est non vide, quel que soit $\vec{v} \in \mathcal{U}$. J'aurai besoin de plus de détails :

LEMME 2

La correspondance $\Psi : \mathcal{U} \ominus \widetilde{\mathfrak{R}}$ est à valeurs convexes et de graphe fermé.

DEMONSTRATION

Cela ressort immédiatement du fait que les fonctions u_i sont quasi-concaves et continues.

Prenons deux éléments $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1)$ et $(\vec{X}_2, \vec{Y}_2)$ de $\Psi(\vec{v})$, et donnons-nous $\lambda \in [0, 1]$. Posons $\vec{X} = \lambda \vec{X}_1 + (1 - \lambda) \vec{X}_2$, et $\vec{Y} = \lambda \vec{Y}_1 + (1 - \lambda) \vec{Y}_2$. Alors $(\vec{X}, \vec{Y})$ appartient encore à $\widetilde{\mathfrak{R}}$, puisque cet ensemble est convexe. En outre, puisque $u_i(\vec{x}^i_1) \geqslant v_i$ et $u_i(\vec{x}^i_2) \geqslant v_i$, on aura $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$. Donc $(\vec{X}, \vec{Y})$ appartient à $\Psi(\vec{v})$.

Prenons une suite $\vec{v}_n \in \mathcal{U}$ tendant vers $\vec{v}$, une suite $(\vec{X}_n, \vec{Y}_n) \in \Psi(\vec{v}_n)$ tendant vers $(\vec{X}, \vec{Y})$ dans $\widetilde{\mathcal{R}}$, et montrons que $(\vec{X}, \vec{Y}) \in \Psi(\vec{v})$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a $u_i(\vec{x}^i_n) \geqslant v_i$, et il suffit de passer à la limite pour obtenir $u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i$, le résultat désiré.

Si $\vec{v} \in \mathcal{U}$ est une imputation parétienne, on peut également lui associer l'ensemble $\Phi(\vec{v})$ des systèmes de prix qui la soutiennent (définition 2.13). C'est une partie de $\overline{\Pi}$, non vide d'après l'hypothèse (K 3) et la proposition 2.11. J'aurai besoin d'autres propriétés :

LEMME 3

La correspondance $\Phi : \mathcal{U} \ominus \overline{\Pi}$ est à valeurs convexes et de graphe fermé.

DEMONSTRATION

Rappelons la définition 2.11. Dire $\vec{p} \in \Phi(\vec{v})$ signifie que :

$$[u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i \text{ et } \vec{y} \in Y_s] \Rightarrow \langle \vec{p}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \vec{y} \rangle \geqslant 0. \tag{5}$$

Soit $\vec{q}$ un autre point de $\Phi(\vec{v})$:

$$[u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i \text{ et } \vec{y} \in Y_s] \Rightarrow \langle \vec{q}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \vec{y} \rangle \geqslant 0. \tag{6}$$

Soit $\alpha \vec{p} + (1 - \alpha) \vec{q}$ un point quelconque du segment $[\vec{p}, \vec{q}]$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. En multipliant le second terme de (5) par α, le second terme de (6) par $(1 - \alpha)$, et en ajoutant, on obtient :

$$[u_i(\vec{x}^i) \geqslant v_i \text{ et } \vec{y} \in Y_s] \Rightarrow \langle \alpha \vec{p} + (1-\alpha)\vec{q}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \vec{y} \rangle \geqslant 0$$

ce qui exprime simplement que $\alpha \vec{p} + (1 - \alpha) \vec{q}$ appartient lui aussi à l'ensemble $\Phi(\vec{v})$, qui est donc convexe.

Pour montrer que le graphe de Φ est fermé, il faut prendre une suite $\vec{v}_n \in \mathcal{U}$ convergeant vers $\vec{v}$, une suite $\vec{p}_n \in \Phi(\vec{v}_n)$ convergeant vers $\vec{p}$, et prouver que $\vec{p} \in \Phi(\vec{v})$. Prenons donc une allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ telle que $u_i(\vec{x}^i) > v_i$, et un vecteur $\vec{y} \in Y_s$. Comme les composantes v_{ni} de $\vec{v}_n$ tendent vers v_i, on aura $u_i(\vec{x}^i) > v_{in}$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Comme $\vec{p}_n \in \Phi(\vec{v}_n)$, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant n_0, \langle \vec{p}_n, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \vec{y} \rangle \geqslant 0.$$

En passant à la limite, puisque $\vec{p}_n$ tend vers $\vec{p}$:

$$< \vec{p}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \vec{y} > \geqslant 0. \tag{7}$$

On a donc montré que les inégalités strictes $u_i(\vec{x}^i) > v_i$, jointes à $\vec{y} \in Y_s$, impliquent l'inégalité (7). Mais cela suffit pour que le système de prix $\vec{p}$ soutienne l'imputation $\vec{v}$: les formules (22) et (24) du paragraphe 2 sont équivalentes. D'où le résultat.

Intéressons-nous enfin aux autres éléments du triplet $[\vec{v}, \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})]$. Etant donné un système de prix $\vec{p} \in \overline{\Pi}$, et un élément $(\vec{X}, \vec{Y})$ de $\widetilde{\mathcal{R}}$, on peut faire les comptes du i^{eme} consommateur. Ses dépenses correspondent à l'achat du panier de biens $\vec{x}^i$, et se montent donc à $< \vec{p}, \vec{x}^i >$. Ses recettes proviennent de la vente de ses ressources initiales, et de sa part des profits $< \vec{p}, \vec{y}^k >$ des entreprises ; ils ont été calculés ci-dessus, et sont donnés par la formule (1). Au total, si :

$$< \vec{p}, \vec{x}^i > \leqslant < \vec{p}, \vec{\omega}^i > + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i < \vec{p}, \vec{y}^k > \tag{8}$$

le consommateur i a un budget en équilibre. Si l'inégalité est stricte, il met même de l'argent de côté. Par contre, si

$$< \vec{p}, \vec{x}^i > \; > \; < \vec{p}, \vec{\omega}^i > + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i < \vec{p}, \vec{y}^k >, \tag{9}$$

il est en déficit.

Je me propose de « punir » les consommateurs qui vivent au-dessus de leurs moyens en leur assignant une utilité nulle. Plus précisément, je pose :

$$I(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}) = \left\{ i \mid < \vec{p}, \vec{x}^i - \vec{\omega}^i - \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i \vec{y}^k > > 0 \right\} \tag{10}$$

$$\Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}) = \left\{ \vec{v} \in \mathcal{U} \mid v_i = 0 \text{ pour } i \in I(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}) \right\} \tag{11}$$

Si par exemple l'inégalité (8) est vérifiée quel que soit i, l'ensemble $\Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$ est $\mathcal{U}$ tout entier. Dans ce cas, non seulement les producteurs peuvent fournir l'allocation $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, mais les consommateurs peuvent aussi en financer l'achat. Par contre, si l'inégalité (8) est vérifiée pour $i \geqslant 2$, mais pas pour $i = 1$, l'ensemble $\Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$ sera l'intersection de $\mathcal{U}$ et de l'hyperplan $v_1 = 0$. C'est ce qu'on pourrait appeler une face de $\mathcal{U}$, par analogie avec le simplexe Σ. C'est d'ailleurs cette analogie, formulée par la proposition 2.10, qui permet de montrer que Λ est à valeurs non vides.

LEMME 4

La correspondance $\Lambda : \bar{\Pi} \times \widetilde{\mathcal{R}} \ominus \mathcal{U}$ *est à valeurs non vides et de graphe fermé.*

DEMONSTRATION

Remarquons d'abord qu'il n'est pas possible d'avoir tous les consommateurs en déficit simultanément. En effet, si l'on avait

$$<\vec{p}, \vec{x}^i> \; > \; <\vec{p}, \vec{\omega}^i> + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i <\vec{p}, \vec{y}^k>$$

pour tout i, il suffirait d'ajouter membre à membre ces *m* inégalités pour obtenir :

$$<\vec{p}, \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i> \; > \; <\vec{p}, \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i> + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i <\vec{p}, \vec{y}^k>.$$

Ceci s'écrit aussi :

$$<\vec{p}, \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i> \; > \; <\vec{p}, \vec{\Omega}> + \sum_{k=1}^{p} (\sum_{i=1}^{m} \theta_k^i) <\vec{p}, \vec{y}^k>.$$

Mais le terme entre parenthèses est égal à l'unité, quel que soit k, d'après la règle (1 b). Il reste finalement l'inégalité :

$$<\vec{p}, \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i> \; > \; <\vec{p}, \vec{\Omega}> + <\vec{p}, \sum_{k=1}^{p} \vec{y}^k>,$$

en contradiction avec l'égalité de définition de $\widetilde{\mathcal{R}}$:

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i = \vec{\Omega} + \sum_{k=1}^{p} \vec{y}^k.$$

L'ensemble I $(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$ n'est donc jamais égal à $S = \{ 1, \ldots, m \}$ tout entier. Rappelons-nous maintenant la proposition 2.10 et ses notations. Suivant l'usage du chapitre II, je désignerai par Σ (S \ I) la face du simplexe Σ définie par :

$$\Sigma (S \setminus I) = \{ \vec{w} \in \Sigma \mid w_i = 0 \;\; \forall \, i \in I \}.$$

Comme I $(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}) \neq S$, on est sûr que Σ (S \ I) est non vide. L'application σ, définie par la formule (2.16), met en bijection les ensembles Σ (S \ I) et $\Lambda (\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$. Ce dernier est donc non vide. Il est fermé puisque la face Σ (S \ I) est fermée et l'application σ continue.

Pour montrer que le graphe de Λ est fermé, prenons une suite $\vec{p}_n \in \bar{\Pi}$ convergeant vers $\vec{p}$, une suite $(\vec{X}_n, \vec{Y}_n)$ de $\widetilde{\mathcal{R}}$ convergeant vers $(\vec{X}, \vec{Y})$, une suite $\vec{v}_n \in \Lambda (\vec{p}_n, \vec{X}_n, \vec{Y}_n)$ convergeant vers $\vec{v}$, et montrons que $\vec{v} \in \Lambda (\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$.

Considérons d'abord l'ensemble I $(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$. Dire $i \in I(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$ signifie que :

$$< \vec{p}, \vec{x}^i - \vec{\omega}^i - \sum_{k=1}^{p} \theta^i_k \vec{y}^k > \; > 0.$$

Comme cette inégalité est stricte, elle subsiste pour $(\vec{p}_n, \vec{x}^i_n, \vec{Y}_n)$ assez voisins de $(\vec{p}, \vec{x}^i, \vec{Y})$. En d'autres termes, on peut trouver un rang n_0 tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \; < \vec{p}_n, \vec{x}^i_n - \vec{\omega}^i - \sum_{k=1}^{p} \theta^i_k \vec{y}^k_n > \; > 0$$

et donc $i \in I(\vec{p}_n, \vec{X}_n, \vec{Y}_n)$. On a donc montré que :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \; I(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}) \subset I(\vec{p}_n, \vec{X}_n, \vec{Y}_n).$$

Grâce à la formule (11), ceci se traduit immédiatement par :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \; \Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}) \supset \Lambda(\vec{p}_n, \vec{X}_n, \vec{Y}_n).$$

En particulier, tous les termes de la suite $\vec{v}_n$ sont contenus dans $\Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$ à partir du rang n_0. Comme cet ensemble est fermé, il contient la limite $\vec{v}$, et le résultat est établi.

Maintenant, nous sommes prêts :

DEMONSTRATION DU THEOREME 2

On considère la correspondance :

$\mathcal{S}$: $[\vec{v}, \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})] \rightarrow \Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}) \times \Phi(\vec{v}) \times \Psi(\vec{v})$ de $\mathcal{U} \times \overline{\Pi} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ dans lui-même.

En d'autres termes, $[\vec{w}, \vec{q}, (\vec{Z}, \vec{T})]$ appartient à $\mathcal{S}\,[\vec{v}, \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})]$ si l'on a simultanément :

$$\vec{w} \in \Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}), \vec{q} \in \Phi(\vec{v}), \text{ et } (\vec{Z}, \vec{T}) \in \Psi(\vec{v}).$$

Cette multi-application est donc à valeurs non vides. Il est facile de vérifier que son graphe est fermé, puisque les graphes de Λ, Φ et Ψ le sont. Enfin, l'ensemble $\mathcal{U} \times \overline{\Pi} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ est compact puisque $\mathcal{U}$, $\overline{\Pi}$, et $\widetilde{\mathcal{R}}$ le sont.

Pour appliquer le théorème de Kakutani, il ne nous manque que les hypothèses de convexité. Malheureusement, elles ne sont pas vérifiées, puisque l'ensemble $\mathcal{U}$ n'est pas convexe. Toutefois, il ressemble beaucoup à un convexe, en l'occurence le simplexe Σ, et cela nous suffira. Plus précisément, la proposition 2.9 nous apprend l'existence d'une bijection σ de $\mathcal{U}$ sur Σ, continue ainsi que son inverse τ. Remplaçons donc $\mathcal{U}$ par Σ, et la correspondance $\mathcal{S}$ par

$$\mathcal{G}' : [\vec{v}', \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})] \to \sigma [\Lambda (\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})] \times \Phi [\tau (\vec{v}')] \times \psi [\tau (\vec{v}')]$$

de $\Sigma \times \overline{\Pi} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ dans lui-même.

La correspondance $\mathcal{G}'$ vérifie toutes les hypothèses du théorème de Kakutani, y compris les hypothèses de convexité. En effet, l'ensemble $\Sigma \times \overline{\Pi} \times \widetilde{\mathcal{R}}$ est convexe puisque Σ, $\overline{\Pi}$ et $\widetilde{\mathcal{R}}$ le sont. Pour $[\vec{v}', \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})]$ donnés, $\Phi (\tau \ (\vec{v}'))$ et $\Psi (\tau \ (\vec{v}'))$ sont convexes d'après les lemmes 1 et 2, et $\sigma [\Lambda (\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})]$ est une face du simplexe Σ, donc convexe elle aussi. Les ensembles $\mathcal{G}'$ $[\vec{v}', \vec{p}', (\vec{X}, \vec{Y})]$ sont donc toujours convexes.

D'après le théorème de Kakutani, la correspondance $\mathcal{G}'$ possède un point fixe $[\vec{v}', \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})]$:

$$\vec{v}' \in \sigma [\Lambda (\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})], \vec{p} \in \Phi [\tau (\vec{v}')], \text{et } (\vec{X}, \vec{Y}) \in \psi [\tau (\vec{v}')].$$

Posons $\tau (\vec{v}') = \vec{v} \in \mathcal{U}$. Alors $[\vec{v}, \vec{p}, (\vec{X}, \vec{Y})]$ est un point fixe de $\mathcal{G}$:

$$\vec{v} \in \Lambda (\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y}), \ \vec{p} \in \Phi (\vec{v}), \ \text{et} \ (\vec{X}, \vec{Y}) \in \psi (\vec{v}).$$

Il n'y a plus qu'à vérifier que $\vec{p}$ est un système de prix d'équilibre, et $\vec{X}$ une allocation d'équilibre, c'est-à-dire que les quatre conditions de la définition 1 sont satisfaites. Le fait que l'allocation $\vec{X}$ soit réalisable provient automatiquement de la condition $(\vec{X}, \vec{Y}) \in \widetilde{\mathcal{R}}$, donc $\vec{X} \in \mathcal{R}$; d'où (a) de la définition 1.

La relation $(\vec{X}, \vec{Y}) \in \Psi (\vec{v})$ exprime que $u_i (\vec{x}^i) \geqslant v_i$ pour tout *i*. Comme $\vec{v}$ est une imputation parétienne, l'allocation réalisable $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ doit être un optimum de Pareto. La relation $\vec{p} \in \Phi (\vec{v})$ exprime que le système de prix $\vec{p}$ soutient l'imputation parétienne $\vec{v}$. D'après les inégalités $u_i (\vec{x}^i) \geqslant v_i$, il doit soutenir aussi l'imputation parétienne $(u_1 (\vec{x}^1), \ldots, u_m (\vec{x}^m))$ (définition 2.13).

On en déduit aussitôt la condition (d). Il suffit d'appliquer la définition 2.13 à l'allocation $\vec{X}$ et à n'importe quel vecteur de production global $\vec{\eta} = \vec{\eta}^1 + \ldots + \vec{\eta}^p$, avec $\vec{\eta}^k \in Y_k$ pour tout k. On obtient :

$$< \vec{p}, \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \Sigma \vec{\eta}^k > \ \geqslant 0.$$

En tenant compte de la relation $(\vec{X}, \vec{Y}) \in \widetilde{\mathcal{R}}$, c'est-à-dire $\Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} = \Sigma \vec{y}^k$, cette inégalité devient :

$$< \vec{p}, \sum_{k=1}^{p} (\vec{y}^k - \vec{\eta}^k) > \ \geqslant 0, \ \forall \vec{\eta}^k \in Y_k,$$

soit aussi :

$$\sum_{k=1}^{p} [<\vec{p},\vec{y}^k> - <\vec{p},\vec{\eta}^k>] \geqslant 0 \quad \forall \vec{\eta}^k \in Y_k.$$

Prenons $\vec{\eta}^1$ quelconque dans Y_1, et appliquons l'inégalité précédente avec $\vec{\eta}^2 = \vec{y}^2, \ldots, \vec{\eta}^p = \vec{y}^p$. Elle se réduit à :

$$<\vec{p},\vec{y}^1> \geqslant <\vec{p},\vec{\eta}^1> \quad \forall \vec{\eta}^1 \in Y_1.$$

On montre cette même inégalité pour tout k. La condition (d) est satisfaite : les producteurs maximisent leur profit.

Supposons que l'un des consommateurs, le premier par exemple, présente un budget en déficit :

$$<\vec{p},\vec{x}^1> \; > \; <\vec{p},\vec{\omega}^1> + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i <\vec{p},\vec{y}^k>. \tag{12}$$

Comme $\vec{v} \in \Lambda(\vec{p}, \vec{X}, \vec{Y})$, on déduit des formules (10) et (11) que v_1 doit être nul : $v_1 = 0$. Par hypothèse, u_1 $(\vec{\omega}^1)$ est positif, si bien qu'on peut appliquer la définition 2.13 à l'allocation $(\vec{\omega}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^l)$ et au vecteur de production global $\vec{y} = \Sigma \vec{y}^k$. En tenant compte une fois de plus de l'égalité $\Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} = \Sigma \vec{y}^k$, on obtient :

$$<\vec{p},\vec{\omega}^1 - \vec{x}^1> \geqslant 0. \tag{13}$$

Remarquons maintenant que $<\vec{p},\vec{y}^k>$ est positif quel que soit k. Il suffit pour le voir d'écrire $<\vec{p},\vec{y}^k> \geqslant <\vec{p},\vec{\eta}^k>$ avec $\vec{\eta}^k = \vec{0} \in Y_k$. En ajoutant à l'inégalité (13) les termes supplémentaires $\theta_k^i <\vec{p},\vec{y}^k>$, tous positifs, on obtient :

$$<\vec{p},\vec{x}^1> \leqslant <\vec{p},\vec{\omega}^1> + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i <\vec{p},\vec{y}^k>, \tag{14}$$

en contradiction avec l'hypothèse (12), qui était donc absurde.

On montre ainsi que tous les consommateurs présentent un budget en équilibre :

$$\forall i, <\vec{p},\vec{x}^i> \leqslant <\vec{p},\vec{\omega}^i> + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i <\vec{p},\vec{y}^k>. \tag{15}$$

Je dis que toutes ces inégalités sont en fait des égalités ; pour le voir, il suffit de les écrire sous la forme :

$$\forall i, <\vec{p},\vec{x}^i - \vec{\omega}^i - \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i \vec{y}^k> \leqslant 0. \tag{16}$$

Si l'on ajoute tous les premiers membres, on obtient l'expression :

$$< \vec{p}, \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i - \sum_{i=1}^{m} \vec{\omega}^i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i \vec{y}^k >, \tag{17}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \Theta_k^i \vec{y}^k = \sum_{k=1}^{p} (\sum_{i=1}^{m} \theta_k^i) \vec{y}^k = \sum_{k=1}^{p} \vec{y}^k.$$

L'expression (17) se réduit donc à :

$$< \vec{p}, \sum_{i=1}^{m} \vec{x}^i - \vec{\Omega} - \sum_{k=1}^{p} \vec{y}^k > = 0$$

puisque $(\vec{X}, \vec{Y}) \in \widetilde{\mathcal{R}}$. Si une somme de termes de même signe est nulle, chacun de ces termes est nul. Les premiers membres des inégalités (16) sont donc nuls :

$$\forall\, i, < \vec{p}, \vec{x}^i > = < \vec{p}, \vec{\omega}^i > + \sum_{k=1}^{p} \cdot \theta_k^i < \vec{p}, \vec{y}^k >. \tag{18}$$

Ceci établit la condition (b). En outre, comme les ω_k^i sont strictement positifs, le nombre $< \vec{p}, \vec{\omega}^i >$ l'est aussi :

$$< \vec{p}, \vec{\omega}^i > = \sum_{k=1}^{l} p_k\, \omega_k^i > 0. \tag{19}$$

On a vu que les $< \vec{p}, \vec{y}^k >$ étaient positifs. La formule (18), compte tenu de l'inégalité (19), montre alors que :

$$\forall\, i, < \vec{p}, \vec{x}^i > > 0.$$

Il ne reste plus qu'à faire jouer le corrollaire 2.17 : la formule (33) nous donne exactement la condition (c). Le théorème 2 est établi.

Essayons maintenant d'en mesurer la portée. A première vue, la conclusion paraît très puissante. On annonce un système de prix $\vec{p}$; chaque producteur maximise son profit et verse leurs dividendes à ses actionnaires ; chaque consommateur achète ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut se payer. Tous ces comportements sont strictements individualistes ; nul ne se soucie de ce que fait autrui, ni s'il pourra s'approvisionner, ni s'il pourra écouler sa production. Le théorème 2 affirme qu'il est possible de choisir le système de prix $\vec{p}$ de telle sorte qu'ils s'harmonisent automatiquement. Les relations (a), (b), (c), (d) sont des conditions de comptabilité entre les actions des consommateurs et des producteurs, et elles se trouvent miraculeusement remplies si $\vec{p}$ est un système de prix d'équilibre.

Il faut un peu tempérer cet enthousiasme. L'harmonie globale n'est obtenue automatiquement que si le système de prix $\vec{p}$ détermine sans ambiguïté le comportement des agent économiques. On rencontre de nouveau le problème de l'unicité, chez les producteurs comme chez les consommateurs. Il se peut que la relation (d) conduise, non à un seul, mais à plusieurs vecteurs de production $\vec{y}^k$. Il se peut que la relation (c) conduise, non pas à un, mais à plusieurs paniers de biens $\vec{x}^i$. Dans ce cas, les critères adoptés, maximisation du profit, maximisation de l'utilité, laissent au producteur k ou au consommateur i une certaine liberté de choix. Le théorème 2 affirme simplement que ces choix peuvent être faits de telle sorte que les conditions de comptabilité (a) et (b) soient remplies. Mais il ne donne pas d'indication pratique sur la façon de procéder. L'harmonie globale est une simple possibilité ; ce n'est que dans le cas d'unicité qu'elle devient une nécessité.

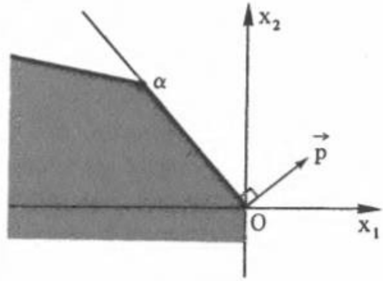


FIGURE IV.20

Les problèmes dus au manque d'unicité : la donnée du système de prix $\vec{p}$ ne détermine pas le vecteur de production : tous les éléments de $\Gamma_l(\vec{p})$ (segment α 0) sont des candidats possibles.

Tout ceci, bien entendu, n'est vrai que dans le cadre défini par les hypothèses (K 1), (K 2), (K 3). En ce qui concerne les consommateurs, elles ont été analysées au chapitre précédent. Pour le reste, il s'agit principalement de la convexité des ensembles de production. Certes, il y a d'autres hypothèses, libre disponibilité des biens, irréversibilité de la production, mais elles sont assez naturelles. Il n'en est pas de même de l'hypothèse de convexité, qui exclut du modèle toutes les entreprises à rendements croissants ; ce cas est suffisamment fréquent dans la pratique pour qu'on s'en inquiète. Le fait que le théorème 2 ne s'applique pas ne fait que traduire une difficulté plus profonde : le comportement de ce type de producteur ne peut pas se ramener à la simple maximisation du profit. En fait, pour un système de prix $\vec{p}$ donné, plus il produit plus il gagne ! Ce n'est pas en agissant sur les prix qu'on peut l'inciter à arrêter sa production à une quantité donnée.

La question se pose alors en des termes tout à fait différents : pour un système de prix donné, le producteur devra évaluer la demande et ne produire que ce qu'il pourra écouler. La situation est beaucoup plus complexe qu'au théorème 2, où l'ajustement de l'offre à la demande était automatique. Ici, il est à la charge du producteur. Celui-ci doit évaluer à priori combien il vendrait aux prix $\vec{p}$, et en déduire le niveau de production adéquat, soit $\eta_k(\vec{p}) \in Y_k$. Ce vecteur ne dépend du système de prix qu'indirectement, par l'intermédiaire des prévisions que fait le producteur sur la demande.

Nous sommes déjà loin de notre modèle. Mais la tentation est grande de s'en écarter encore plus. Pourquoi ne pas considérer $\eta_k(\vec{p})$ comme une fonction de $\vec{p}$, calculer le profit $< \vec{p}, \eta_k(\vec{p}) >$ correspondant, et chercher le système de prix $\vec{p}_k \in \overline{\Pi}$ qui le rende maximum ? De fait, les entreprises à rendements croissants sont très souvent en situation de monopole ou d'oligopole. Plusieurs raisons peuvent en être données, soit que les premiers à atteindre une taille suffisante éliminent du marché les nouveaux arrivants, soit que la logique même des rendements croissants pousse les entreprises à fusionner. Le cas du monopole est celui où un producteur est le seul à fournir d'un certain bien. Il peut donc en régler le prix, simplement en produisant moins que le marché ne serait disposé à absorber, et en laissant les consommateurs enchérir les uns sur les autres pour s'arracher les quantités disponibles. Maximiser $< \vec{p}, \eta(\vec{p}) >$ pour $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ rentre alors dans le domaine du possible : c'est le critère qui guidera le monopoleur. Il s'agit toujours de maximiser le profit, mais en agissant sur les prix et non plus en les subissant. En général, cela conduira le monopoleur à fixer un niveau de production plus bas (et donc des prix plus élevés) que ce que les consommateurs seraient disposés à absorber.

Le cas de l'oligopole est celui où ils ne sont que quelques-uns à fournir d'un certain bien. On ne peut plus dire alors que chacun de ces producteurs peut régler les prix à sa convenance, puisqu'en cas de défaillance les consommateurs peuvent toujours se tourner vers ses concurrents. Toutefois, ces producteurs sont assez peu nombreux et assez importants pour ne pouvoir suppléer entièrement à la défaillance de l'un d'eux. Cela veut dire que chacun d'eux a, non pas une mainmise totale, mais une certaine influence sur les prix. Ces possibilités d'action, jointes à la diversité des objectifs ($\vec{p}_k$ change avec k : chaque producteur a son système de prix optimal), créent une situation de jeu. C'est par des méthodes de théorie des jeux, analogues à celles du chapitre II, que l'on analyse l'oligopole.

Nous ne nous embarquerons pas dans ces directions. Retenons simplement qu'il est essentiel, pour la validité des résultats obtenus jusqu'ici, que le producteur subisse les prix et ne les influence pas. On admet généralement qu'il en est ainsi quand il y a beaucoup de producteurs, et de peu d'importance, de telle sorte que la défaillance de l'un d'eux, dut-il cesser toute activité, est insensible dans la masse globale. C'est la situation dite de concurrence parfaite, à l'opposé du monopole et de l'oligopole. Aucun producteur en particulier n'a d'influence sur les prix : c'est toujours la multitude, sans visage et sans volonté, des « autres » qui les lui impose.

4. Analyse marginale

J'abandonne maintenant les hypothèses de convexité pour les relations de préférence et les ensembles de production. Dès lors, nous ne pourrons plus affirmer que tout optimum de Pareto est soutenu par un système de prix, ni qu'il existe des équilibres concurrentiels. On peut obtenir certains renseignements, mais ils sont de nature différente, et nécessitent l'emploi d'autres méthodes, pour lesquelles je vais préparer le terrain.

Les relations de préférence seront représentées par des fonctions d'utilité continues u_i. Pour simplifier, je les supposerai strictement monotones : cela permettra de ne considérer que des systèmes de prix positifs. En d'autres termes, tous les biens sont désirés :

$$\vec{z} \in \vec{x} + \mathbb{R}^l_+ \text{ et } \vec{z} \neq \vec{x} \quad \Rightarrow \vec{z} \succ_i \vec{x} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

L'ensemble de production global Y_s, le seul auquel je m'intéresse pour l'instant, ne sera plus supposé convexe, mais lisse. Je lui permets des creux et des bosses, mais pas de coins. Plus précisément, je suppose qu'il existe une fonction $\varphi_s : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, différentiable, telle que :

$$\vec{y} \in Y_s \Leftrightarrow \varphi_s(y_1, \ldots, y_l) \leqslant 0. \tag{1}$$

FIGURE IV.21

Quelques possibilités pour l'ensemble Y_s.

Le bord de l'ensemble Y_s est donc défini par l'équation φ_s $(y_1, \ldots, y_l) = 0$. C'est une hypersurface de l'espace $\mathbb{R}^l$, notée $\mathbb{S}$, qui sépare les modes de production techniquement possibles de ceux qui ne le sont pas. Je fais l'hypothèse supplémentaire qu'en chaque point de $\mathbb{S}$, le gradient de la fonction φ_s est non nul :

$$\varphi_s (y_1, \ldots, y_n) = 0 \Rightarrow \exists\, k : \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k} (y_1, \ldots, y_n) \neq 0, \tag{2}$$

ou, de manière plus condensée, en notant $\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$ le vecteur de composantes $\partial \varphi_s / \partial y_k$:

$$\vec{y} \in \mathbb{S} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi(\vec{y}) \neq \vec{0}. \tag{3}$$

Cette hypothèse permet d'affirmer que l'hypersurface $\mathbb{S}$ est bien lisse, ne présente ni arêtes, ni coins et ne se recoupe pas elle-même. C'est un objet géométrique conforme à notre intuition, une draperie flottante mais pas froissée. En particulier, l'hypersurface $\mathbb{S}$ admet en chaque point un hyperplan tangent, et une direction de normale. Si $\vec{y} \in \mathbb{S}$, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi_s\ (\vec{y})$ est normal à $\mathbb{S}$ en ce point et tous les autres vecteurs normaux lui sont colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$ (d'origine $\vec{y}$) tangents à $\mathbb{S}$ sont caractérisés par l'équation :

$$< \vec{u}, \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_s\, (\vec{y}) > = 0.$$

En particulier un point $\vec{z} \in \mathbb{R}^l$ appartiendra à l'hyperplan tangent à $\mathbb{S}$ en $\vec{y}$ si et seulement si :

$$< \vec{z} - \vec{y}, \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_s\, (\vec{y}) > = 0.$$

Il faut remarquer que ces hypothèses ne se comparent pas simplement aux précédentes. Celles-ci étaient moins restrictives par certains côtés, et davantage par d'autres : un ensemble convexe peut avoir des coins, mais pas de creux. Il en sera de même quant aux résultats. Nous ne cherchons plus à montrer l'existence d'optima de Pareto, à fortiori d'équilibres concurrentiels. Mais nous cherchons des règles de gestion simples permettant de réaliser un optimum de Pareto donné.

Soit donc $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ un optimum de Pareto, faible ou fort, et $\Sigma \vec{x}^i \in \mathbb{R}^l_+$ la consommation globale qui lui correspond. On aura nécessairement :

$$\vec{y} = \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega} \in Y_s. \tag{4}$$

PROPOSITION 1

Si $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est un optimum de Pareto, le point $\vec{y} = \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega}$ appartient au bord $\mathbb{S}$ de l'ensemble de production Y_s.

DEMONSTRATION

On sait déjà que le point $\vec{y}$ appartient à l'ensemble Y_s. S'il n'était pas sur le bord, il serait à l'intérieur :

$$\varphi_s(y_1, \ldots, y_l) < 0.$$

Il y aurait donc autour de $\vec{y}$ une boule de rayon $\epsilon > 0$ assez petit, entièrement contenue dans Y_s. En d'autres termes, pourvu que $\| \vec{u} \| \leqslant \epsilon$, on aura :

$$\vec{y} + \vec{u} \in Y_s.$$

Rien n'empêche de choisir toutes les composantes de $\vec{u}$ strictement positives, puis de partager ce panier de biens entre les *m* consommateurs. En donnant à l'agent *i*, non plus $\vec{x}^i$ mais $\vec{x}^i + \frac{\vec{u}}{m}$, on arrive à une consommation globale :

$$\sum_{i=1}^{m} (\vec{x}^i + \frac{\vec{u}}{m}) = \vec{y} + \vec{u} + \vec{\Omega} \in Y_s + \vec{\Omega}.$$

On a donc là une allocation réalisable, unanimement préférée à $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ d'après la stricte monotonie des préférences :

$$(\vec{x}^i + \frac{\vec{u}}{m}) \succ_i \vec{x}^i \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Ceci contredit l'hypothèse que $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est un optimum de Pareto, et le résultat est établi.

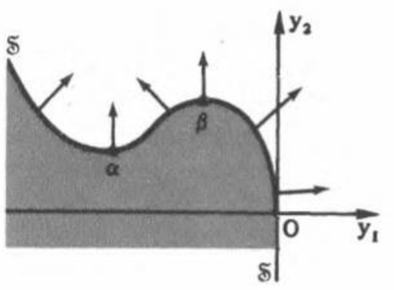


FIGURE IV.22

Pour l'ensemble Y_s indiqué, les seuls vecteurs de production susceptibles de donner lieu à un optimum de Pareto sont les points de la courbe $\mathbb{S}$, à l'exception du segment $\alpha\,\beta$.

Les vecteurs de production $\vec{y}$ associés à des optima de Pareto sont donc représentés par des points de $\mathbb{S}$. On peut même être plus précis : en un tel point, $\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi_s\ (\vec{y})$ doit appartenir à $\mathbb{R}^l_+$. En d'autres termes, les seuls points de $\mathbb{S}$ susceptibles de provenir d'optima de Pareto sont ceux où la normale est dirigée vers l'orthant positif.

PROPOSITION 2

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ un optimum de Pareto et $\vec{y} = \Sigma\,\vec{x}^i - \vec{\Omega} \in \mathbb{S}$ le vecteur de production associé. Alors :

$$\overrightarrow{grad}\ \varphi_s\ (\vec{y}) \in \mathbb{R}^l_+. \tag{5}$$

DEMONSTRATION

C'est ici qu'intervient la monotonie des préférences. Nous venons de voir que si le vecteur $\vec{u}$ a toutes ses composantes strictement positives, alors $\vec{y} + \vec{u}$ n'appartient pas à Y_s, faute de quoi $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ ne serait pas un optimum de Pareto. En d'autres termes :

$$(\vec{y} + \mathring{\mathbb{R}}^l_+) \cap Y_s = \phi.$$

Si Y_s était convexe, on pourrait séparer ces deux ensembles, et on retomberait sur les résultats du paragraphe 2. Ce n'est malheureusement plus le cas. On peut simplement remarquer que l'hyperplan H tangent à $\mathbb{S}$ en $\vec{y}$ ne saurait rencontrer le cône ouvert $\vec{y} + \mathring{\mathbb{R}}^l_+$.

S'il en était autrement, il y aurait au moins un vecteur $\vec{v}$, tangent à l'hypersurface $\mathbb{S}$ au point $\vec{y}$, et dont toutes les composantes seraient strictement positives. Il y aurait donc un chemin différentiable $\vec{\eta}$ (t), issu de $\vec{y}$ et tracé sur $\mathbb{S}$, dont $\vec{v}$ serait la tangente à l'origine :

$$t \in [0, 1[, \vec{\eta}(0) = \vec{y} \text{ et } \vec{\eta}(t) \in \mathcal{S} \; \forall t$$

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt}(0) = \vec{v} \in \mathring{\mathbb{R}}^l_+.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, on a $\frac{d\,\eta_k}{d\,t}(0) > 0$, donc $\eta_k(t) > \eta_k(0) = y_k$ pour t assez petit. Le point $\vec{\eta}(t)$ appartiendrait donc à l'ensemble $(\vec{y} + \mathring{\mathbb{R}}^l_+) \cap Y_s$; or celui-ci est vide, ce qui fournit une contradiction.

L'intérêt de ce résultat est qu'on peut prendre $\vec{\text{grad}}\, \varphi_s(\vec{y})$ comme système de prix particulier, à condition bien entendu de le normaliser :

DEFINITION 3

On dit que le système de prix : $\vec{p} \in \bar{\Pi}$:

$$p_k = \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k}(\vec{y}) \Big/ \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k}(\vec{y}) \tag{6}$$

dérive de l'optimum de Pareto $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ et du vecteur de production $\vec{y}$.

Nous avions déjà défini des systèmes de prix soutenant un optimum, pour un ensemble de production convexe. Je définis à présent un système de prix dérivé d'un optimum, pour un ensemble de production lisse. Dans le cas où il est à la fois convexe et lisse, les deux notions coïncident. En particulier, il n'y aura qu'un seul système de prix soutenant un optimum de Pareto donné, et il sera défini par les formules (6).

Dans le cas général, lisse mais non convexe, l'interprétation économique fait appel à des outils plus fins. Le point de départ est la formule :

$$\begin{aligned} d\,\varphi_s(\vec{y}) &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_1}(\vec{y})\, d\,y_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_l}(\vec{y})\, d\,y_l \\ &= \langle \vec{\text{grad}}\, \varphi_s(\vec{y}), d\,\vec{y} \rangle \end{aligned} \tag{7}$$

reliant la variation infinitésimale $d\,\varphi_s$ de la fonction φ_s aux variations infinitésimales $d\,y_1, \ldots, d\,y_k$ des variables $y_1, \ldots, y_k$. Le mot « infinitésimal » est mathématique. Les économistes classiques ont introduit le mot « marginal » pour désigner cette même notion : des variations extrêmement petites autour d'une quantité donnée. Si les valeurs des variables sont $y_1, \ldots, y_l$, la valeur de la fonction est $\varphi_s (y_1, \ldots, y_l)$; si les variables passent à $y_1 + d y_1, \ldots, y_k + d y_k$, la fonction passera à :

$$\varphi_s (y_1 + d y_1, \ldots, y_l + d y_l) = \varphi_s (\vec{y}) + d \varphi_s (\vec{y}). \tag{8}$$

où l'accroissement $d \varphi_s (\vec{y})$ est donné par la formule (7). Cette dernière n'est qu'approximative : elle n'est vraie en toute rigueur que pour des variations $d y_1, \ldots, d y_l$ (et donc $d \varphi_s (\vec{y})$) « infiniment petites » autour de $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_l)$. L'approximation est d'autant meilleure que ces variations sont petites. Nous utiliserons donc la formule (7) pour calculer l'accroissement de la fonction φ_s résultant de petits accroissements des variables autour des valeurs $(y_1, \ldots, y_l)$. Le mot « marginal » attire l'attention sur le fait que les résultats ne sont qu'approximatifs, d'autant plus voisins de la réalité que les variations effectuées sont plus petites.

Soit par exemple $\vec{y} \in Y_s$ un vecteur de production globale. On peut se demander à quelles conditions un vecteur voisin $\vec{y} + d \vec{y}$ continue à appartenir à Y_s. En d'autres termes, quels sont les petits changements $(d y_1, \ldots, d y_l)$ qu'on peut apporter à un bilan de production $(y_1, \ldots, y_l)$, tout en restant dans le domaine du possible ? Si le vecteur $\vec{y}$ est intérieur à Y_s, il est le centre d'une petite boule entièrement contenue dans Y_s ; donc $\vec{y} + d \vec{y}$ continuera à appartenir à Y_s, pourvu simplement que $d \vec{y}$ soit assez petit. Par contre, si le vecteur $\vec{y}$ appartient au bord $\mathbb{S}$ de Y_s, quelque petite que soit la variation $d \vec{y}$, si elle est mal dirigée elle peut faire sortir de Y_s.

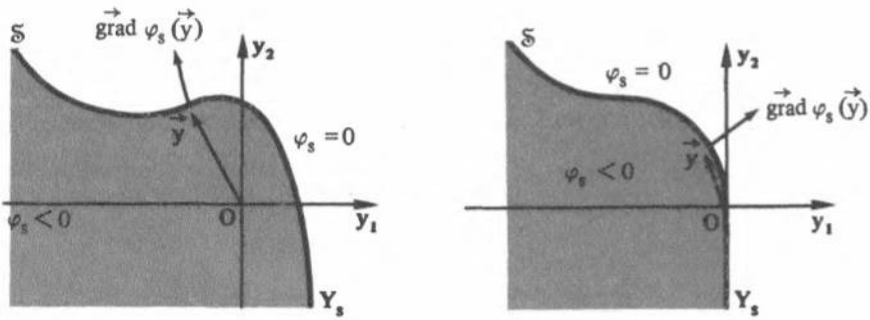


FIGURE IV.23

En dimension $l = 2$, on a représenté deux situations possibles au voisinage d'un point $\vec{y} \in \mathbb{S}$. Dans chaque cas, on figure deux déplacements infinitésimaux, $d_1 \vec{y}$ et $d_2 \vec{y}$, le produit scalaire avec le gradient étant alternativement positif et négatif. On constate que $\vec{y} + d_1 \vec{y}$ sort de Y_s, et que $\vec{y} + d_2 \vec{y}$ y reste. La tangente T sépare ces deux cas. Il faut se représenter $d_1 \vec{y}$ et $d_2 \vec{y}$ comme très petits. Le cas où le produit scalaire $\langle \vec{\text{grad}} \varphi_s (\vec{y}), d\vec{y} \rangle$ est nul correspond à un déplacement sur T, qui se confond pratiquement avec $\mathbb{S}$.

Examinons ceci. Si le vecteur de production $\vec{y}$ appartient au bord $\mathbb{S}$, il doit vérifier l'égalité $\varphi_s(\vec{y}) = 0$. On désire que le vecteur $\vec{y} + d\,\vec{y}$ continue à appartenir à Y_s, c'est-à-dire à vérifier l'inégalité $\varphi_s(\vec{y} + d\,\vec{y}) \leqslant 0$. L'accroissement marginal de φ_s doit donc être négatif ou nul :

$$d\,\varphi_s(\vec{y}) = \langle \vec{\text{grad}}\,\varphi_s(\vec{y}), d\,\vec{y} \rangle \leqslant 0. \tag{9}$$

Si l'on désire que le vecteur $\vec{y} + d\,y$ appartienne lui aussi au bord $\mathbb{S}$, l'inégalité (9) devient une égalité :

$$d\,\varphi_s(\vec{y}) = \langle \vec{\text{grad}}\,\varphi_s(\vec{y}), d\,\vec{y} \rangle = 0. \tag{10}$$

L'interprétation géométrique de ces formules est très claire. Le vecteur $\vec{\text{grad}}\,\varphi_s(\vec{y})$ porte la normale à l'ensemble Y_s, dirigée de l'intérieur vers l'extérieur. Le produit scalaire $\langle \vec{\text{grad}}\,\varphi_s(\vec{y}), d\,\vec{y} \rangle$ situe donc le vecteur $\vec{y} + d\,\vec{y}$ par rapport à l'hyperplan H, tangent à l'hypersurface $\mathbb{S}$ au point $\vec{y}$. Dire qu'il est nul (10) signifie que $\vec{y} + d\,\vec{y}$ appartient à H ; dire qu'il est négatif signifie que $\vec{y} + d\,\vec{y}$ est du même côté de H que l'ensemble Y_s.

Mais ces formules ont aussi une interprétation économique d'une grande importance. Plaçons-nous en un optimum de Pareto $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, notons $\vec{y} = \Sigma\,\vec{x}^i - \vec{\Omega} \in \mathbb{S}$ le vecteur de production associé, et $\vec{p} \in \bar{\Pi}$ le système de prix dérivé (définition 3). En divisant les formules (9) et (10) par la quantité $\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k}(\vec{y})$, strictement positive, on obtient :

$$\vec{y} + d\,\vec{y} \in Y_s \Leftrightarrow \langle \vec{p}, d\,\vec{y} \rangle \leqslant 0 \tag{11}$$

$$\vec{y} + d\,\vec{y} \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \langle \vec{p}, d\,\vec{y} \rangle = 0. \tag{12}$$

Or, quand le bilan de production passe de $\vec{y}$ à $\vec{y} + d\,\vec{y}$, le profit passe de $\langle \vec{p}, \vec{y} \rangle$ à $\langle \vec{p}, \vec{y} + d\,\vec{y} \rangle$. L'expression $\langle \vec{p}, d\,\vec{y} \rangle$ n'est autre que le profit supplémentaire encouru par une petite variation $d\,y_1, \ldots, d\,y_l$ du bilan de production. Dans le langage usuel, c'est le *profit marginal.* La formule (11) signifie que le profit marginal est nécessairement négatif, pourvu que le système de prix dérive de l'optimum de Pareto considéré. La formule (12) exprime qu'on peut toutefois l'annuler, en maintenant le nouveau bilan de production $(y_1 + d\,y_1, \ldots, y_n + d\,y_n)$ sur l'hypersurface $\mathbb{S}$.

PROPOSITION 4

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ un optimum de Pareto, $\vec{y} = \Sigma \vec{x}^i - \vec{\Omega}$ le vecteur de production associé, et $\vec{z}$ un vecteur de production infiniment voisin. Le profit marginal

$$<\vec{p}, \vec{z} - \vec{y}>$$

est négatif pour $\vec{z} \in Y_s$, nul pour $\vec{z} \in \mathbb{S}$.

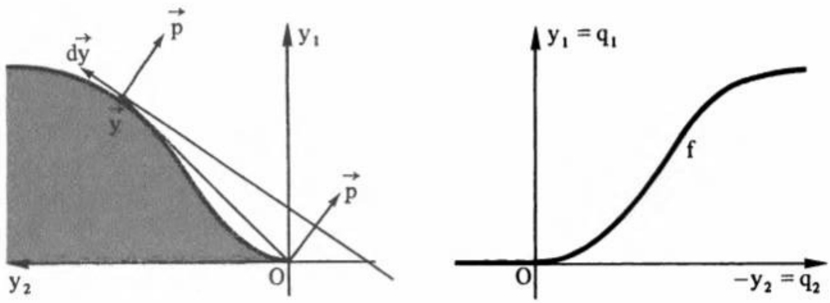


FIGURE IV.24

A droite, on a représenté la fonction de production f associée à l'ensemble Y. A gauche, on a montré la nullité du profit marginal $< \vec{p}, \vec{dy} >$.

Pour clarifier un peu les idées, prenons un cas simple. Soit une économie produisant du bien 1 en utilisant les biens 2, 3, . . ., *l*. Plus précisément, l'utilisation de quantités $q_2, \ldots, q_2$ permet de produire une quantité :

$$q_1 = f(q_2, \ldots, q_l), \; q_k \geqslant 0. \tag{13}$$

On appelle souvent f la *fonction de production.* Pour traduire cela dans notre langage, il faut d'abord compter négativement les entrées. La relation (13) se traduit alors par une équation que doivent satisfaire les vecteurs de production $\vec{y} \in Y_s$:

$$y_1 = f(-y_2, \ldots, -y_l). \tag{14}$$

Il est naturel de supposer la fonction de production croissante : si l'une des entrées augmente, les autres restant inchangées, la sortie ne doit pas diminuer. Cela revient à supposer que l'on peut librement disposer des biens 2, . . ., *l*, c'est-à-dire qu'on peut stocker les ressources excédentaires. Si on fait la même hypothèse en ce qui concerne le bien 1, on est conduit à caractériser l'ensemble de production Y_s par la fonction :

$$\varphi_s(\vec{y}) = y_1 - f(-y_2, \ldots, -y_l), \tag{15}$$

pourvu que $y_1, \ldots, y_l$ soient strictement négatifs. Dans ce même domaine, le bord $\mathfrak{S}$ est défini par la condition $\varphi_s(\vec{y}) = 0$, qui n'est autre que l'équation (14).

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ un optimum de Pareto, et $\vec{y}$ le vecteur de production associé, qui appartient donc à $\mathfrak{S}$. Le système de prix dérivé est donné par :

$$p_1 = 1 / \pi,$$

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial q_k}(-y_2, \ldots, -y_l) / \pi \text{ pour } 2 \leqslant k \leqslant l$$

où $\pi = 1 + \sum_{k=2}^{l} \frac{\partial f}{\partial q_k}(-y_2, \ldots, -y_l)$. Comme la fonction f est croissante pour chacune des variables $q_2, \ldots, q_k$, les dérivées partielles sont positives, sans qu'il soit besoin d'invoquer la proposition 2.

Cherchons maintenant à modifier légèrement le bilan de production. Amenons les entrées de $(y_2, \ldots, y_l)$ à $(y_2 + d\,y_2, \ldots, y_l + d\,y_l)$. La production peut alors passer de y_1 à

$$f(-y_2 - d\,y_2, \ldots, -y_l - d\,y_l) = y_1 - \sum_{k=2}^{l} \frac{\partial f}{\partial q_k}(-y_2, \ldots, -y_l)\, d\,y_k.$$

Comme d'habitude, le signe – dans cette formule provient de ce que les entrées sont comptées négativement ; si tous les $d\,y_k$ sont négatifs, cela veut dire que l'on utilise davantage des biens 2, . . ., *l*, et qu'on peut donc augmenter la production du bien *l*. Mais on n'est pas tenu de lui donner tout l'accroissement possible, puisqu'on peut librement disposer des biens. On peut se contenter de n'importe quel accroissement $d\,y_1$, pourvu que :

$$d\,y_1 \leqslant - \sum_{k=2}^{l} \frac{\partial f}{\partial q_k}(-y_2, \ldots, -y_l)\, d\,y_k. \tag{16}$$

L'égalité, dans cette formule, correspond à la meilleure utilisation du processus de production. Dès que l'inégalité est stricte, il y a disparition ou gaspillage d'une certaine quantité de bien *l*. La sanction économique ne se fait pas attendre : évaluons le profit marginal dans le système de prix $\vec{p}$. On obtient :

$$\langle \vec{p}, d\vec{y} \rangle = p_1\, d y_1 + \sum_{k=2}^{l} p_k\, d y_k$$

$$= \frac{1}{\pi} d y_1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{l} \frac{\partial f}{\partial q_k} (-y_2, \ldots, -y_l)\, d y_k \tag{17}$$

d'où, en tenant compte de la formule (16) :

$$\langle \vec{p}, d\vec{y} \rangle \leqslant 0. \tag{18}$$

On retrouve donc, dans ce cas particulier, la proposition 4 : le profit marginal doit être négatif. Remarquons cependant que s'il est strictement négatif, c'est le signe d'une mauvaise gestion : on aurait pu produire davantage de bien 1 dans les mêmes conditions. Si l'on écarte ce cas, dû à un comportement irrationnel ou à une erreur humaine, on a l'égalité dans les formules (16) et (18) :

$$\langle \vec{p}, d\vec{y} \rangle = 0. \tag{19}$$

C'est sous cette forme que la règle se trouve énoncée dans les traités d'économie : si l'économie se trouve en un optimum de Pareto, et si elle utilise constamment au mieux les possibilités technologiques, le profit marginal doit être nul. Ceci suppose qu'il soit évalué dans le système de prix dérivé de l'optimum.

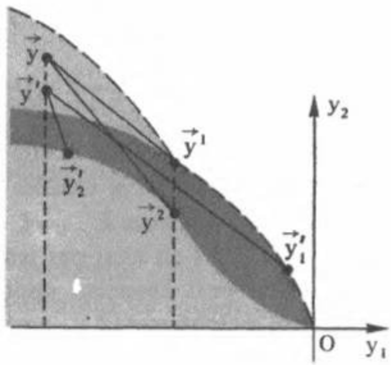


FIGURE IV.25

Construction de l'ensemble de production global dans le cas de deux entreprises.. On a figuré Y_1 et Y_2; un vecteur de production $\vec{y}$ quelconque de Y_s est obtenu en additionnant un $\vec{y}^1 \in Y_1$ et un $\vec{y}^2 \in Y_2$. On a construit un autre exemple, $\vec{y}' = \vec{y}_1' + \vec{y}_2'$. Les points $\vec{y}$ et $\vec{y}'$ obtenus appartiennent à Y_s, mais pas nécessairement à sa frontière. Celle-ci est figurée en pointillé.

On peut l'énoncer sous une autre forme encore. Examinons le second membre de la formule (17). Le premier terme représente la valeur marchande de la quantité supplémentaire d y_1 produite. Le second les dépenses supplémentaires du producteur, c'est-à-dire ce qu'elle a coûté. Le profit marginal est la différence des deux. Dire qu'il est nul, c'est dire que le producteur doit vendre sa marchandise à un prix égal au coût de production d'une unité supplémentaire. En particulier, ce coût ne doit pas dépendre du procédé employé à cette fin, c'est-à-dire des proportions relatives de biens 2, . . ., l engagées dans la production d'une unité supplémentaire de bien 1. On dit que le producteur vend à son coût marginal.

Nous tenons maintenant la règle de gestion que nous cherchions : nullité du profit marginal, ou vente au coût marginal. Encore faut-il l'essayer sur un modèle moins agrégé. Nous nous replacerons donc dans le cadre habituel : les ressources initiales $\vec{\Omega}$ sont réparties entre les m consommateurs, les possibilités de production Y_s entre p entreprises, de telle sorte que :

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}^1 + \ldots + \vec{\omega}^m \tag{20}$$

$$Y_s = Y_1 + \ldots + Y_p. \tag{21}$$

On supposera que les fonctions d'utilité u_i sont monotones et continûment différentiables. Les ensembles de production Y_k sont définis par des fonctions φ_k, continûment différentiables :

$$\vec{y} \in Y_k \Leftrightarrow \varphi_k(\vec{y}) \leqslant 0. \tag{22}$$

En outre, je supposerai les gradients $\overrightarrow{\text{grad}}\, u_i$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_k$ non nuls partout où ce sera nécessaire.

On se fixe pour toute la suite un optimum de Pareto $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$; disons que ce sont les objectifs à atteindre pour l'économie dans son ensemble. La question est de savoir comment réaliser cet optimum. Certes, on peut imaginer que le bureau du plan assigne à chaque consommateur i son panier de biens $\vec{x}^i$ et à chaque entreprise k son vecteur de production $\vec{y}^k \in Y_k$, de telle sorte que :

$$\vec{y} = \Sigma\, \vec{y}^k = \Sigma\, \vec{x}^i - \vec{\Omega}. \tag{23}$$

Mais ce qu'on cherche, c'est une procédure décentralisée : le bureau du plan se contentera d'annoncer un système de prix, et les réactions individuelles des agents se combineront pour réaliser l'optimum désiré. Il faut donc trouver, et le système de prix adéquat, et les comportements individuels qui conduiront à cet optimum.

Guidés par la première partie, nous prescrirons le système de prix $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ dérivé de l'optimum par les formules (6). La fonction φ_s est associée à l'ensemble Y_s défini par la relation (21), et l'on supposera grad φ_s $(\vec{y})$ non nul. Dans ces conditions, nous avons vu que l'économie dans son ensemble encourt un profit marginal négatif ou nul. Il en sera de même des producteurs individuels :

PROPOSITION 5

Soient $\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^p$ des vecteurs de production individuels vérifiant l'égalité (23). Pour chaque k, et chaque vecteur de production $\vec{z}^k \in Y_k$ infiniment voisin de $\vec{y}^k$, on a :

$$<\vec{p}, \vec{z}^k - \vec{y}^k> \leqslant 0. \tag{24}$$

DEMONSTRATION

Par hypothèse :

$$\vec{y} = \vec{y}^1 + \ldots + \vec{y}^p \in Y_s.$$

Si l'on change $\vec{y}^k$ en $\vec{z}^k$, les autres termes ne bougeant pas, la somme $\vec{y}$ augmente de $(\vec{z}^k - \vec{y}^k)$. Si $\vec{z}^k$ continue à appartenir à Y_k, le vecteur $\vec{y} + (\vec{z}^k - \vec{y}^k)$ appartient encore à Y_s, d'après la formule (21). La proposition 4 nous fournit alors la relation cherchée :

$$<\vec{p}, \vec{z}^k - \vec{y}^k> \leqslant 0$$

pourvu que $\vec{z}^k$ soit infiniment voisin de $\vec{y}^k$.

En comparant la formule (24) à la relation

$$<\vec{\text{grad}}\, \varphi_k\, (\vec{y}^k), \vec{z}^k - \vec{y}^k> \leqslant 0,$$

on conclut que les vecteurs $\vec{\text{grad}}\, \varphi_k\, (\vec{y}^k)$ sont tous colinéaires entre eux et à $\vec{p} \in \Pi$. En d'autres termes, les hyperplans H_k tangents à Y_k au point $\vec{y}^k$ sont tous parallèles entre eux $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Ceci se voit très bien sur une figure. L'interprétation économique n'est pas moins claire : pour réaliser l'optimum cherché, chaque producteur doit annuler son profit marginal. Restent les

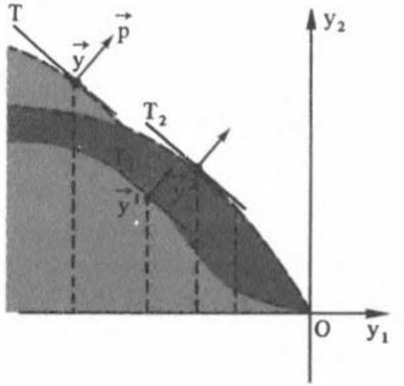


FIGURE IV.26

Etant donné un point $\vec{y}$ du bord de Y_s, comment le décomposer en $\vec{y}^1 + \vec{y}^2$? La réponse est donnée par la prop. 6 : on mène la tangente T à Y_s en $\vec{y}$, et on cherche les points $\vec{y}^1$ et $\vec{y}^2$ de Y_1 et Y_2 où les tangentes sont parallèles. Les normales sont toutes portées par $\vec{p}$, système de prix dérivé de l'optimum.

consommateurs. Nous allons formuler en ce qui les concerne une règle de comportement analogue.

PROPOSITION 6

Soit $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ l'optimum de Pareto prescrit, et $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ le système de prix dérivé. Pour chaque i, et chaque panier de biens $\vec{z}^i$ infiniment voisin de $\vec{x}^i$ et strictement préféré à ce dernier, on a :

$$<\vec{p}, \vec{z}^i - \vec{x}^i> \geqslant 0. \tag{25}$$

DEMONSTRATION

Prenons par exemple i = 1, et considérons un panier de biens $\vec{z}^1 \succ_1 \vec{x}^1$. L'allocation $(\vec{z}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m)$ est unanimement préférée à $(\vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m)$. Comme celle-ci est un optimum de Pareto, celle-là n'est pas réalisable :

$$\vec{y} = \vec{x}^1 + \vec{x}^2 + \ldots + \vec{x}^m + \vec{\Omega} \in Y_s$$
$$\vec{z} = \vec{z}^1 + \vec{x}^2 + \ldots + \vec{x}^m + \vec{\Omega} \notin Y_s.$$

On a $\varphi_s(\vec{y}) = 0$ et $\varphi_s(\vec{z}) > 0$. Comme $\vec{z} - \vec{y} = \vec{z}^1 - \vec{x}^1$ est infiniment petit, on peut appliquer la formule (7) :

$$d\varphi_s = <\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_s(\vec{y}), \vec{z} - \vec{y}> > 0$$

ce qui, en tenant compte des formules (6), n'est autre que le résultat annoncé.

Là encore, il y a une interprétation géométrique et une interprétation économique. Dire que $\vec{z}^i$ est strictement préféré à $\vec{x}^i$ signifie que :

$$u_i(\vec{z}^i) > u_i(\vec{x}^i)$$

ou encore, s'ils sont infiniment voisins :

$$< \overrightarrow{\text{grad}}\, u_i(\vec{x}^i), \vec{z}^i - \vec{x}^i > \; < 0. \tag{26}$$

En comparant cette inégalité à la formule (25), on obtient que tous les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, u_i(\vec{x}^i)$ sont colinéaires entre eux et à $\vec{p}$. En d'autres termes, les hyperplans tangents aux surfaces d'indifférence aux points $\vec{x}^i$ sont tous parallèles. Ceci se voit également très bien sur une figure.

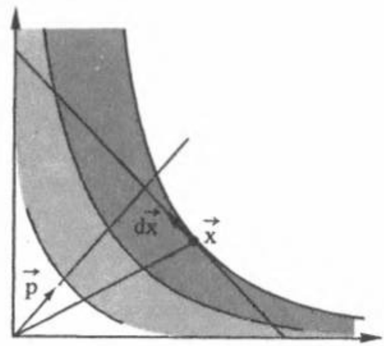


FIGURE IV.27

L'annulation du coût marginal pour le consommateur.

De même, dire que $\vec{x}^i$ est préféré à $\vec{z}^i$ se traduit par l'inégalité inverse de (26). Ainsi, la proposition 6 peut se mettre sous la forme :

$$\vec{z}^i \succsim_i \vec{x}^i \Rightarrow <\vec{p}, \vec{z}^i> \; > \; <\vec{p}, \vec{x}^i> \tag{27}$$

$$\vec{x}^i \succsim_i \vec{z}^i \Rightarrow <\vec{p}, \vec{z}^i> \; \leqslant \; <\vec{p}, \vec{x}^i> \tag{28}$$

pourvu que $\vec{z}^i$ soit infiniment voisin de $\vec{x}^i$. Ces deux conditions sont équivalentes. La première exprime que le consommateur *i*, qui paye $<\vec{p}, \vec{x}^i>$ pour obtenir $\vec{x}^i$, ne saurait améliorer marginalement sa consommation sans payer davantage. La seconde signifie que les paniers de biens infiniment voisins de $\vec{x}^i$ et qu'il considère comme inférieurs lui coûteraient moins cher. On peut également donner une troisième condition, équivalente aux deux premières :

$$\vec{x}^i \sim_i \vec{z}^i \Rightarrow <\vec{p}, \vec{z}^i - \vec{x}^i> \; = \; 0, \tag{29}$$

toujours pour $\vec{z}^i$ infiniment voisin de $\vec{x}^i$. Le terme $< \vec{p}, \vec{z}^i - \vec{x}^i >$ est le coût supplémentaire encouru par l'agent *i*, s'il modifie très légèrement sa consommation tout en restant sur la même surface d'indifférence. Nous dirons que c'est le *coût marginal* pour l'agent *i* au point $\vec{x}^i$. Les trois règles (27), (28), (29) s'expriment donc commodément en disant que les consommateurs annulent leur coût marginal.

Dans le cas particulier où les relations de préférence sont convexes, annuler le coût marginal revient à maximiser la fonction d'utilité. On retrouve ainsi la règle que nous avions formulée antérieurement pour le cas convexe :

PROPOSITION 7

Soit u une fonction d'utilité quasi-concave, $\vec{x} \in \mathring{\mathbb{R}}^l_+$ et $\vec{p} \in \overline{\Pi}$ des vecteurs donnés. Si $\vec{\text{grad}}\, u(\vec{x}) \neq \vec{0}$, il est équivalent de dire :

(a) $< \vec{p}, \vec{x}^i - \vec{z}^i > \geqslant 0$ *pour tout $\vec{z}^i$ infiniment voisin de $\vec{x}^i$ et vérifiant $\vec{x}^i \succsim_i \vec{z}^i$.*

(b) $u_i(\vec{z}^i) \leqslant u_i(\vec{x}^i)$ *pour tout $\vec{z}^i \in \mathbb{R}^l_+$ vérifiant $<\vec{p}, \vec{z}^i> < <\vec{p}, \vec{x}^i>$.*

DEMONSTRATION

(a) ⇒ (b). Prenons un point $\vec{z}^i \in \mathbb{R}^l_+$, distinct de $\vec{x}^i$, et vérifiant l'inégalité :

$$<\vec{p}, \vec{z}^i> < <\vec{p}, \vec{x}^i>. \tag{30}$$

Considérons le point $y_t = (1 - t)\vec{z}^i + t\,\vec{x}^i$ et la fonction $\varphi(t) = u_i(\vec{y}_t)$. Quand t décrit l'intervalle [0, 1], le point y_t parcourt le segment $[\vec{z}^i, \vec{x}^i]$. La dérivée de φ au point t = 1 est donnée par :

$$\varphi'(1) = < \text{grad}\, u_i(\vec{x}^i), \vec{x}^i - \vec{z}^i >. \tag{31}$$

Mais la condition (a) implique que $\vec{\text{grad}}\,(\vec{x}) = \lambda\, \vec{p}$, avec $\lambda > 0$, comme nous venons de le voir. La comparaison des formules (30) et (31) nous montre que $\varphi'(1)$ est strictement positif. On peut donc choisir $\epsilon > 0$ assez petit pour avoir $\varphi(t) > \varphi(1)$ sur l'intervalle $]1, 1 + \epsilon[$. En d'autres termes :

$$\vec{y}_t \succ_i \vec{x}^i \quad \text{pour } 1 < t < 1 + \epsilon.$$

Ceci prouve l'inégalité (b) désirée. En effet, si l'on avait $u^i(\vec{z}^i) > u^i(\vec{x}^i)$, l'ensemble $\mathfrak{S}$ des paniers de biens strictement préférés à $\vec{x}^i$ contiendrait

$\vec{z}^i$ et $\vec{y}_t$ pour $1 < t < 1 + \epsilon$. Comme il est convexe, il contiendrait tout le segment $[\vec{z}^i, \vec{y}_t]$, et en particulier le point $\vec{x}^i$, ce qui est absurde $(\vec{x}^i \succ_i \vec{x}^i)$.
(b) $\Rightarrow$ (a). Il suffit de comparer $\vec{x}^i$ à un panier de biens $\vec{z}^i$ infiniment voisin. L'inégalité $u_i(\vec{z}^i) \leqslant u_i(\vec{x}^i)$ se traduit alors par :

$$< \overrightarrow{\text{grad}}\, u_i(\vec{x}^i), \vec{x}^i - \vec{z}^i > \geqslant 0 \tag{32}$$

et l'hypothèse (b) est que cette inégalité découle de la suivante :

$$< \vec{p}, \vec{x}^i - \vec{z}^i > > 0. \tag{33}$$

On en déduit aussitôt que $\overrightarrow{\text{grad}}\, u_i(\vec{x}) = \lambda \vec{p}$, avec $\lambda > 0$. La condition (a) se réduit alors à la formule (32).

On peut donc réaliser l'optimum de Pareto $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ de la façon suivante. Le planificateur calcule le système de prix $(p_1, \ldots, p_l)$ qui en dérive. Puis il annonce ce système de prix et attribue à chaque consommateur *i* une fortune $w_i = < \vec{p}, \vec{x}^i >$. Les consommateurs réagissent individuellement, soit en choisissant ce qu'ils préfèrent parmi ce qu'ils peuvent se payer (si leur relation de préférence est convexe), soit en annulant leur coût marginal (si elle ne l'est pas). Les entreprises réagissent individuellement, soit en maximisant leur profit global (si leur ensemble de production est convexe), soit en annulant leur profit marginal (s'il ne l'est pas).

Les propositions 5 et 6 doivent alors être comprises comme des théorèmes de possibilité : elles affirment que ces règles de comportement sont compatibles avec la réalisation de l'optimum global. Si elles sont non ambiguës, c'est-à-dire si elles désignent au consommateur *i* un seul panier de biens, et au producteur *k* un seul vecteur de production, alors la réalisation de l'optimum est automatique : ce panier de biens n'est autre que $\vec{x}^i$, et ce vecteur de production est le $\vec{y}^k$ de la formule (23). Malheureusement, il arrive fréquemment, surtout dans le cas non convexe, que l'application de ces règles laisse subsister plusieurs alternatives. L'entreprise devra alors se prononcer entre quelques vecteurs de production, reliquats d'un tri que la règle utilisée est incapable de pousser plus loin. Cette liberté de choix, quelque restreinte qu'elle soit, ne va pas sans poser de problème. Ce que disent les propositions 5 et 6, c'est qu'il est possible de l'exercer individuellement de manière à réaliser l'optimum prescrit globalement.

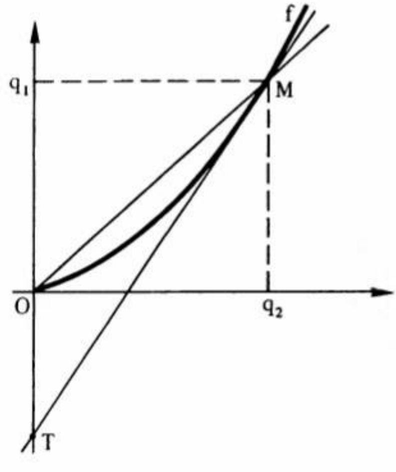


FIGURE IV.28

Entreprise à rendements croissants. La pente q_1 / q_2 de OM est le rendement moyen, la pente $f'(q_2)$ de la tangente MT le rendement marginal. L'un et l'autre croissent avec q_2. Si l'entreprise applique la règle d'annulation du profit marginal, elle adopte un système de prix proportionnels à $(1, f'(q_2))$, et essuie une perte OT, d'autant plus grande que q_2 est plus grand.

La règle d'annulation du profit marginal, dans le cas où l'ensemble de production est convexe, se ramène à la maximisation du profit total. Dans le cas non convexe, elle est beaucoup moins naturelle, et peut même paraître paradoxale. Prenons par exemple le cas d'une entreprise produisant du bien 1 à partir de bien 2, et présentant des rendements croissants. La formule (13) s'écrit alors :

$$q_1 = f(q_2),\ q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0,$$

où la fonction de production f est convexe :

$$f''(q_2) > 0 \quad \forall\, q_2$$

et vérifie $f(0) = 0$. Soit $\vec{p} = (p_1, p_2)$ le système de prix imposé. Le profit marginal est donné par :

$$p_1\, d\, q_1 - p_2\, d\, q_2 = (p_1\, f'(q_2) - p_2)\, d\, q_2 .$$

Si l'entreprise annule son profit marginal, elle choisira l'entrée q_2 de façon à résoudre l'équation :

$$f'(q_2) = p_2 / p_1$$

et la sortie $q_1 = f(q_2)$. On peut alors calculer son profit global :

$$\begin{aligned} p_1\, q_1 - p_2\, q_2 &= p_1\, f(q_2) - p_2\, q_2 \\ &= (p_1 \frac{f(q_2)}{q_2} - p_2)\, q_2 . \end{aligned}$$

Comme la fonction f est convexe et s'annule à l'origine, on a l'inégalité $f(q_2)/q_2 < f'(q_2)$. En reportant dans la formule précédente :

$$p_1 q_1 - p_2 q_2 < (p_1 f'(q_2) - p_2) q_2.$$

En divisant par q_2, ceci s'exprime simplement : le profit total (par unité) est inférieur strictement au profit marginal (par unité). Comme ce dernier est nul, on obtient :

$$p_1 q_1 - p_2 q_2 < 0.$$

Ainsi, si l'entreprise applique la règle d'annulation du profit marginal, elle travaille nécessairement à perte. Ceci est aisément compréhensible : comme les rendements sont croissants, c'est la dernière unité produite qui coûte le moins cher à l'entreprise. Exiger que le profit marginal soit nul, c'est exiger que l'entreprise ne réalise aucun bénéfice sur la dernière unité produite, et donc qu'elle perde sur toutes les autres. C'est la dernière unité qui a été produite dans les conditions les plus avantageuses : si on ne gagne rien sur celle-là, comment pourrait-on gagner sur les autres ?

D'un autre côté, si les entreprises n'annulent pas leur profit marginal, la situation globale qui en résulte pour l'économie ne saurait être optimale au sen de Pareto. C'est ce qui ressort d'une analyse attentive des propositions 5 et 6. En effet, supposons que les entreprises contribuent à réaliser un optimum de Pareto $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, c'est-à-dire que les vecteurs de production vérifient la relation (23). La proposition 5 affirme que, si le système de prix $\vec{p}$ est dérivé de cet optimum, toutes les entreprises annulent leur profit marginal. La seule question qui subsiste est alors de savoir pourquoi ce système de prix particulier prévaudrait sur le marché. La réponse est donnée par la proposition 6 : ce sont les consommateurs qui l'imposent en annulant leur coût marginal. Le consommateur *i* résout pour son compte l'équation $\overrightarrow{\text{grad}}\, u_i(\vec{x}^i) = \lambda_i \vec{p}$; ceci, joint à la condition $\vec{p} \in \overline{\Pi}$, détermine entièrement le système de prix $\vec{p}$.

Reste à montrer qu'il dérive de l'optimum $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_s(\vec{y}) = \mu \vec{p}$, où $\vec{y}$ est donné par la formule (23). Pour cela, on compare $\vec{x}^i$ à un panier de biens $\vec{z}^i$ infiniment voisin et préféré :

$$< \overrightarrow{\text{grad}}\, u_i(\vec{x}^i), \vec{z}^i - \vec{x}^i > = \lambda_i < \vec{p}, \vec{z}^i - \vec{x}^i > \; > 0. \tag{34}$$

Comme $(\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^m)$ est un optimum de Pareto, les $\vec{z}^i$ ne peuvent pas être simultanément réalisables, c'est-à-dire que le vecteur $\Sigma \vec{z}^i - \vec{\Omega}$ n'appartient plus à Y_s :

$$< \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_s (\vec{y}), \Sigma \vec{z}^i - \Sigma \vec{x}^i > \; > 0. \tag{35}$$

La comparaison des formules (34) (valables pour tout i) et (35) montre que $\vec{p}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_s (\vec{y})$ sont colinéaires, le résultat désiré.

Dans tous les cas de rendements croissants, la théorie économique place les producteurs devant un dilemme : accepter de travailler en vue d'un optimum social, et enregistrer un lourd déficit d'exploitation ; ou équilibrer leur budget, voire réaliser un bénéfice, tout en sachant qu'une meilleure utilisation des ressources et de l'appareil productif serait possible. En d'autres termes, le système de prix manifeste les désirs des consommateurs aux producteurs. La seule réponse appropriée de ceux-ci consiste à annuler le profit marginal. Toute autre réponse conduit à une mauvaise gestion de l'économie dans son ensemble, en ce sens qu'il serait techniquement possible de faire strictement mieux pour tout le monde.

Il y a bien là un conflit entre les impératifs de la gestion individuelle des entreprises, et de la gestion globale de l'économie. Il est d'autant plus aigu que les secteurs productifs à rendements croissants sont par nature ceux où quelques très grandes entreprises se partagent le marché ; c'est le domaine de l'oligopole, voire du monopole, où les règles de gestion sont encore bien différentes. Annuler le profit marginal, et courir froidement au déficit, n'apparaîtra jamais comme une règle de gestion naturelle des entreprises à rendements croissants. Si le planificateur désire la voir adopter, il lui faudra l'imposer : c'est l'argument le plus fort qu'on puisse avancer en faveur de la nationalisation. Encore faudra-t-il que l'Etat prenne en charge le déficit structurel de l'entreprise, résultant non d'une mauvaise gestion, mais de règles d'exploitation non orientées vers le profit.

Bibliographie

Les ouvrages suivants présentent surtout un intérêt historique :

V. Pareto [1909], *Manuel d'économie politique*, Paris, Girard et Brière.

L. Walras [1874, 1877], *Eléments d'économie politique pure*, Lausanne, Corbaz.

En ce qui concerne la première partie, la référence la plus complète est :

K. Arrow [1963], *Social choice and individual value*, New York, J. Wiley and Sons.

Pour les trois autres, l'ouvrage qui fait autorité est celui de :

K. Arrow et F. Hahn [1971], *General competitive analysis*, Holden-Day & Oliver Boyd.

En ce qui concerne la deuxième partie, voir plus particulièrement :

I. Ekeland [1974], *La théorie des jeux : une introduction à l'économie mathématique*, Paris, PUF, Collection S.U.P.

W. Hildenbrand et J. Kirman [1976], *Introduction to equilibrium analysis*, North-Holland, Elsevier.

Une bibliographie, complète jusqu'en 1974, figure dans :

G. Debreu [1974], *Mathematical theory of economic equilibrium*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974.

Il faut y rajouter, en ce qui concerne la deuxième partie, l'article de :

L. Shapley [1973], *On balanced games without side payments*, in *Mathematical Programming*, New York, Academic Press.

et pour les considérations sur l'unicité de la troisième partie, la thèse de :

Y. Balasko [1976], *L'équilibre économique du point de vue différentiel*, Université Paris-Dauphine.

Index et notations

Enfin, rappelons quelques notations de théorie des ensembles :

- $A \backslash B$, où A et B sont des ensembles, désigne le complémentaire de B dans A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.
- $\{x \in X \mid P(x)\}$ désigne l'ensemble des points de X possédant la propriété P. Par exemple : $A \backslash B = \{a \in A \mid a \notin B\}$.

Imprimé en France, Boisseau, Toulouse
Dépôt légal : troisième trimestre 1979
Numéro d'édition 5853
Hermann, éditeurs des sciences et des arts